Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Sep/7

Nivel 1

En una isla hay 2015 habitantes. Cada uno de ellos siempre dice la verdad o siempre miente. Si a cada habitante se le pregunta ¿Cuántos mentirosos hay en la isla? Y las respuestas son 1, 2, 3,..., 2014, 2015, ¿Cuántos mentirosos hay en la isla?

Solución:

Notemos que si alguien dice la verdad y dice que hay n mentirosos, entonces $2015-n$ deben decir siempre la verdad.

Por lo tanto, cuando se les pregunta a estos $2015-n$ habitantes cuántos mentirosos hay, todos dirán la verdad y todas sus respuestas serán iguales, sin embargo no hay dos personas que hayan respondido igual, entonces a lo más hay una persona que dijo la verdad, justo la persona que dice que hay 2014 mentirosos es la que dice la verdad.

Por lo que se puede concluir que hay $\boxed{2014}$ mentirosos.

Nivel 2

Hallar todos los valores p para los cuales p, $p+10$ y $p+14$ son números primos.

Solución:

Veamos que $p+10=p+3\bullet 3+1$ y además $p+14=p+3\bullet 4+2$ entonces entre los tres valores debe haber alguno que sea múltiplo de 3 pero como el problema indica que los tres son primos entonces se obtiene que la única solución es

$$\boxed{p=3}$$

Con esta solución los tres valores son 3, 13 y 17.

Nivel 3

Sea n un entero mayor o igual a 2 y sean $x_1,x_2,\ldots,x_n$ números reales positivos. Demostrar que

$$4\left(\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1+x_2}+\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^3-x_n^3}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^3-x_1^3}{x_n+x_1}\right)\leq(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2$$

Solución:

Sea $x_{n+1}=x_1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,3}-x_{i+1}^{\,3}}{x_i+x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}-x_{i+1}^{\,2}+\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}-x_{i+1}^{\,2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}$$

Pero por la propiedad telescópica se tiene que $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}-x_{i+1}^{\,2}\right)=0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,3}-x_{i+1}^{\,3}}{x_i+x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}$$

Ahora demostraremos el siguiente lema:

<u>LEMA:</u> $\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}\le\frac{1}{2}x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$ para todo $x_i,x_{i+1}\in\mathbb{R}^+$.

$$\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}\le\frac{1}{2}x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)\le x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(x_{i+1}+x_i\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x_ix_{i+1}^{\,2}-2x_i^{\,2}x_{i+1}\le x_{i+1}\left(x_{i+1}^{\,2}-x_i^{\,2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x_ix_{i+1}^{\,2}-2x_i^{\,2}x_{i+1}\le x_{i+1}^{\,3}-x_i^{\,2}x_{i+1}$$
$$\Leftrightarrow x_{i+1}^{\,3}+x_i^{\,2}x_{i+1}-2x_ix_{i+1}^{\,2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x_{i+1}\left(x_{i+1}^{\,2}+x_i^{\,2}-2x_ix_{i+1}\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x_{i+1}^{\,2}+x_i^{\,2}-2x_ix_{i+1}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x_{i+1}-x_i\right)^2\ge 0$$

lo cual se sabe que es cierto.

Aplicando el LEMA para $i=1,\ldots,n$ y sumando todas las inecuaciones se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)}{x_i+x_{i+1}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,3}-x_{i+1}^{\,3}}{x_i+x_{i+1}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$$
$$\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,3}-x_{i+1}^{\,3}}{x_i+x_{i+1}}\le\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$$
$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,3}-x_{i+1}^{\,3}}{x_i+x_{i+1}}\le 2\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}^{\,2}-x_{i+1}x_i=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\ldots+\left(x_n-x_1\right)^2$$

Con lo que se concluye la demostración.

Nivel U

Sean $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ tales que $AB = BA$ y $\det\left(A^2 + AB + B^2\right) = 0$. Demostrar que

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6\det(A) + 6\det(B)$$

Solución:

Sea ε una raíz cúbica de la unidad no real. Como $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ y $AB = BA$ entonces

$$A^2 + AB + B^2 = (A - \varepsilon B)\left(A - \bar{\varepsilon} B\right)$$

Como las matrices A y B son reales, el polinomio

$$f(x) = \det(A + xB) = \det A + ax + bx^2 + cx^3 + \det B x^4$$

tiene coeficientes reales.

De $\det\left(A^2 + AB + B^2\right) = 0$ se tiene que $f(\varepsilon) f\left(\bar{\varepsilon}\right) = 0$ con lo que $f(\varepsilon) = f\left(\bar{\varepsilon}\right) = 0$.

De $f(\varepsilon) = \det A + c + \varepsilon(a + \det B) + \varepsilon^2 b$ se deduce que $\det A + c = a + \det B = b$.

Veamos que $f(1) = \det A + a + b + c + \det B$ y $f(-1) = \det A - a + b - c + \det B$ entonces

$$f(1) + f(-1) = 2\det A + 2\det B + 2b$$

Por otro lado

$$2b = a + c + \det A + \det B = \frac{1}{2}\left(f(1) - f(-1)\right) + \det A + \det B$$

por lo que

$$f(1) + 3f(-1) = 6\det A + \det B$$

Pero, como $f(1) = \det(A+B)$ y $f(-1) = \det(A-B)$ entonces

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6\det(A) + 6\det(B)$$