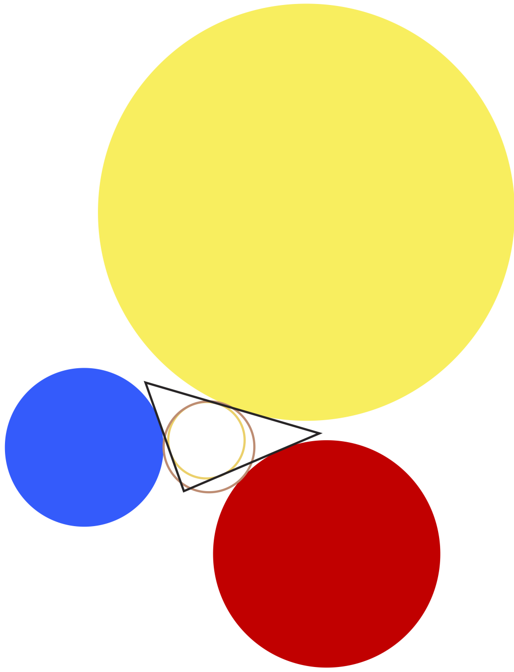


OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS

OMEC

2016

ÍNDICE

1 ENUNCIADOS

1.1 PRIMERA FASE

1.1.1 NIVEL 1

Problema 1. Sabiendo que $9174532 \times 13 = 119268916$, podemos concluir que es divisible por 13 el número:

A) 119268903 B) 119268907 C) 119268911

D) 119268913 E) 119268923

Problema 2. Carlos afirma que 1 billón es lo mismo que mil millones. Paolo lo corrige y dice que 1 billón es lo mismo que un millón de millones. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores que ellos dicen?

A) 1000 B) 999000 C) 1000000

D) 999000000 E) 999000000000

Problema 3. Después del primer silbido que da un entrenador de monos se quedan formados todos en 5 filas, cada una con exactamente 6 monos. Después del segundo silbido cambian su formación y generan exactamente 10 filas, cada una con igual cantidad de monos. ¿Cuántos monos quedan en cada fila después del segundo silbido?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Problema 4. En 8 segundos el canguro hace 6 saltos en total, ¿en cuántos segundos hará 15 saltos?

A) 10 B) 12 C) 15

D) 18 E) 20

Problema 5. Determinar:

$$11111111 - 1111111 + 111111 - 11111 + 1111 - 111 + 11 - 1$$

A) 1111111 B) 10101010 C) 1000000

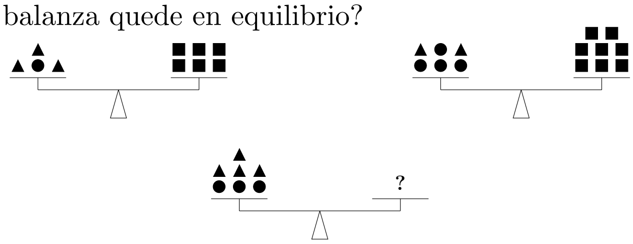
D) 9999999 E) 0

Problema 6. En una caja había 3 medias rojas, 2 blancas y 1 negra. Fernando retiró 3 medias de la caja. Sabiendo que ninguna de ellas era negra, podemos afirmar acerca de las 3 medias retiradas, que:

A) son del mismo color. B) son rojas. C) una es roja y dos son blancas.

D) una es blanca y dos son rojas. E) por lo menos una es roja.

Problema 7. Figuras con la misma forma representan objetos de igual peso. ¿Cuántos cuadrados son necesarios para que la última balanza quede en equilibrio?



A) 7 B) 8 C) 9

D) 10 E) 12

Problema 8. Un agricultor esperaba recibir cerca de 100 mil dólares por la venta de su zafra. Entretanto, la falta de lluvia provocó una perdida de zafra estimada entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ del total previsto. ¿Cuál de los valores siguientes puede representar la pérdida del agricultor?
Nota: Se llama zafra a la cosecha de la caña de azúcar.

A) \$21987.53 B) \$34900.00 C) \$44999.99

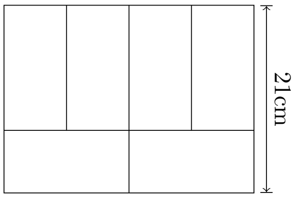
D) \$51987.53 E) \$60000.00

Problema 9. Andrés, Bernardo y Carlos iban caminando a lo largo de la recta numérica. Conforme se iban cansando se detenían. Andrés se detuvo en el número 100; Bernardo se detuvo en el número 1000; Carlos se detuvo en un punto a la misma distancia de los otros dos. ¿En qué número se detuvo Carlos?

A) 400 B) 450 C) 500

D) 550 E) 600

Problema 10. Seis rectángulos idénticos son unidos para formar un rectángulo mayor conforme lo indica la figura.



¿Cuál es el área de este rectángulo mayor?

A) $210\,\text{cm}^2$ B) $280\,\text{cm}^2$ C) $430\,\text{cm}^2$

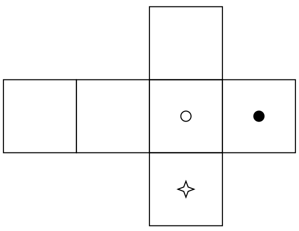
D) $504\,\text{cm}^2$ E) $588\,\text{cm}^2$

Problema 11. Cuando viajé de Guayaquil a Quito en bus me informaron que servían la cena justo a la mitad del viaje. Si salí de Guayaquil a las 06:00 pm y llegué a Quito a las 11:20 pm, ¿a qué hora sirvieron la cena?

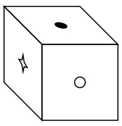
A) 08:10 pm B) 08:50 pm C) 08:20 pm

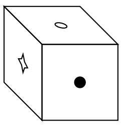
D) 08:40 pm E) 08:30 pm

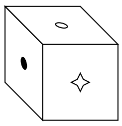
Problema 12. La figura de abajo se diseñó en cartulina y luego se dobló para formar un cubo.

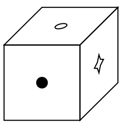


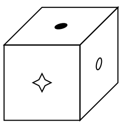
¿Cuál de las siguientes alternativas muestra el cubo que se formó?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Problema 13. De los números siguientes, ¿cuál es el único que puede ser escrito como el producto de cuatro naturales consecutivos?

A) 712 B) 548 C) 1026
D) 1456 E) 1680

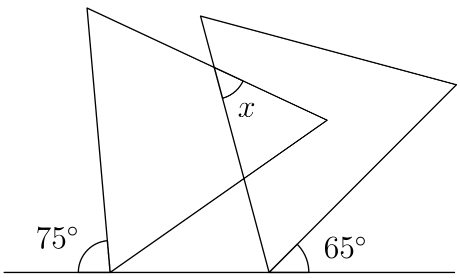
Problema 14. En una carrera, el número de niños que llegaron detrás de Raúl fue el doble del número de niños que llegaron delante de él. Si Raúl llegó décimo. ¿Cuántos niños participaron de la carrera?

A) 16 B) 19 C) 22
D) 25 E) 28

Problema 15. Las 10 sillas de una mesa circular fueron etiquetadas con números consecutivos de dos cifras, entre los que hay dos que son cuadrados perfectos. Anthony se sentó en la silla con el mayor número y Omar, su amigo, se sentó en la silla con el menor número. ¿Cuál es la suma de los números de esas dos sillas?

A) 29 B) 36 C) 37
D) 41 E) 64

Problema 16. En la figura, los dos triángulos son equiláteros.



¿Cuál es el valor del ángulo x?

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

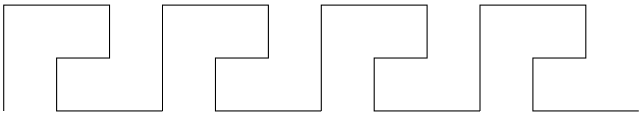
Problema 17. En una calle hay 5 casas numeradas del 1 al 5 (en orden). Una de ellas es azul, otra es roja, otra es amarilla, otra es blanca y otra es gris. Se sabe que las casas azul y blanca tienen número par; que la casa roja sólo tiene una casa al lado, y que la casa azul está junto a las casas amarilla y roja. ¿De qué color es la casa 3?

A) Roja B) Amarilla C) Blanca
D) Azul E) Gris

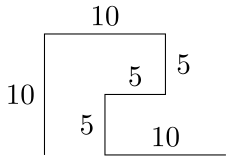
Problema 18. ¿Cuántos números primos de dos dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es 11?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

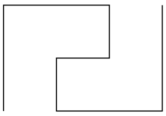
Problema 19. Un cerrajero suelda varillas de metal para producir piezas iguales que serán unidas para formar el panel de abajo.

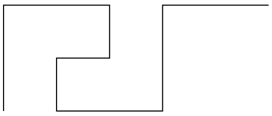


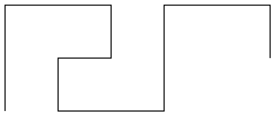
El diseño de abajo presenta las medidas, en centímetros, de una de esas piezas.

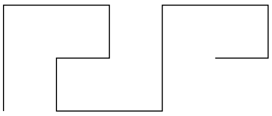


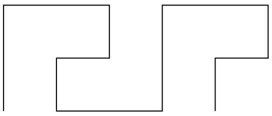
El cerrajero utiliza exactamente 20 metros de varilla para hacer su trabajo. ¿Cuál de los diseños de abajo representa el final del panel?

A) 

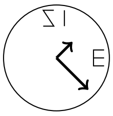
B) 

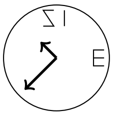
C) 

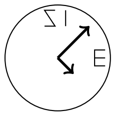
D) 

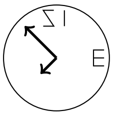
E) 

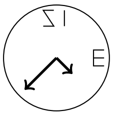
Problema 20. El reloj de Romnie, enhorabuena preciso, es diferente pues sus manecillas se mueven en el sentido antihorario. Si Ud. puede ver el reloj, a través del espejo, cuando está marcando 2h23min, ¿cuál de las siguientes imágenes verá?

A) 

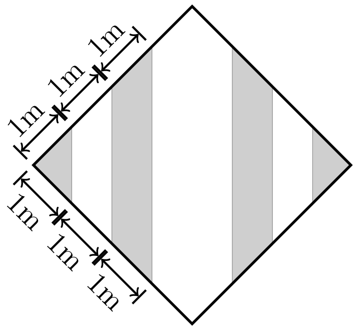
B) 

C) 

D) 

E) 

Problema 21. Una placa decorativa consiste en un cuadrado de 4 metros de lado, pintado de forma simétrica con algunas fajas, conforme lo indica el diseño siguiente.



¿Cuál es la fracción del área de la placa, que fue pintada?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{6}{13}$

E) $\frac{7}{11}$

Problema 22. Tres años atrás, la población de la ciudad A era igual a la población que la ciudad B tiene hoy. De ahí para acá, la población de la ciudad A no cambió, pero la población de la ciudad B creció un 50%. Actualmente, las dos ciudades suman 9000 habitantes. Hace tres años, ¿cuál era la suma de las dos poblaciones?

A) 3600 B) 4500 C) 5000

D) 6000 E) 7500

Problema 23. Se tiene una caja de zapatos de dimensiones $1 \times 2 \times 3$. ¿Cuál es la mínima cantidad de cajas de zapatos que se necesitan para construir un cubo?

A) 12 B) 18 C) 24

D) 36 E) 60

Problema 24. Debido a un defecto de impresión, un libro de 600 páginas presenta en blanco todas las páginas cuyos números son múltiplos de 3 o de 4. ¿Cuántas páginas están impresas?

A) 100 B) 150 C) 250

D) 300 E) 430

Problema 25. WQ Radio realiza un concurso durante su transmisión. El concurso consiste en que los oyentes deben de listar en orden alfabético todos los reordenamientos posibles de las letras de la palabra WQRADIO, como si fuesen palabras de siete letras en un diccionario. Para ganar el concurso los oyentes deben llamar a WQ Radio e indicar cuál es la palabra que aparece en el puesto 2161 de aquella lista.

A) ODIAQRW B) QRWADIO C) ADIOQRW

D) QADIORW E) OADIQRW

1.1.2 NIVEL 2

Problema 1. Véase el problema 5 del nivel 1.

Problema 2. Julio nació el día que Janet cumplió 5 años. ¿Cuántos años tendrá Julio cuando Janet tenga el doble de años que Julio?

A) 3 B) 5 C) 8
D) 12 E) 18

Problema 3. Véase el problema 10 del nivel 1.

Problema 4. Véase el problema 9 del nivel 1.

Problema 5. Julio colocó en un recipiente tres litros de agua y un litro de jugo compuesto de 20% de pulpa y 80% de agua. Después de mezclar todo, ¿qué porcentaje del volumen final es pulpa?

A) 5% B) 7% C) 8%
D) 20% E) 60%

Problema 6. Véase el problema 11 del nivel 1.

Problema 7. Véase el problema 14 del nivel 1.

Problema 8. Véase el problema 17 del nivel 1.

Problema 9. Javier olvidó que hoy tenía examen de matemáticas. ¿De cuántas formas puede Javier adivinar las respuestas a su examen, si éste consiste de 5 preguntas cuyas respuestas son verdadero o falso?

A) 4 B) 5 C) 8
D) 16 E) 32

Problema 10. Véase el problema 18 del nivel 1.

Problema 11. Una tienda de jabones realiza una promoción con el anuncio *"Compre uno y lleve otro por la mitad del precio"*. Otra promoción que la tienda podría hacer, ofreciendo el mismo descuento porcentual es:

A) *"Lleve dos y pague uno"* B) *"Lleve tres y pague uno"* C) *"Lleve tres y pague dos"*
D) *"Lleve cuatro y pague tres"* E) *"Lleve cinco y pague cuatro"*

Problema 12. A una convención asisten 50 políticos. Se sabe que:

- Cada político es honesto o deshonesto (no hay otra posibilidad).
- Al menos uno de los políticos es deshonesto.
- Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos es honesto.

¿Cuántos políticos son deshonestos y cuántos son honestos?

A) 1 y 49 B) 2 y 48 C) 25 y 25
D) 10 y 40 E) 20 y 30

Problema 13. Omar escribió en la pizarra un número de dos dígitos. Daniel inmediatamente se dio cuenta que aquel número era muy interesante. La primera observación de Daniel fue que el dígito de las decenas del número de Omar excede al de las unidades en cuatro unidades. Daniel luego intercambió los dígitos del número y duplicó este valor. Daniel luego hizo la observación de que el número original excede a este nuevo número en exactamente diez unidades. ¿Qué número escribió Omar en la pizarra?

A) 50 B) 62 C) 73

D) 84 E) 95

Problema 14. Un alambre se corta en dos partes, en razón 4 a 3 y con cada una de las partes se forma un cuadrado. ¿Cuál es la razón entre el perímetro del cuadrado más grande y el perímetro del cuadrado más pequeño?

A) 16:9 B) 4:3 C) 5:3

D) 5:2 E) 12:7

Problema 15. Un piloto recorre tres trechos de un rally, de extensiones 240 km, 300 km y 400 km, respectivamente. Las velocidades medias en los tres trechos fueron 40 km/h, 75 km/h y 80 km/h, pero no necesariamente en ese orden. Podemos asegurar que el tiempo total en horas empleado por el piloto en los tres trechos es:

A) menor o igual a 13 horas.

B) mayor o igual a 13 horas y menor o igual a 16 horas.

C) mayor o igual a 14 horas y menor o igual a 17 horas.

D) mayor o igual a 17 horas y menor o igual a 18 horas.

E) mayor o igual a 18 horas.

Problema 16. ¿Cuántos números entre 10 y 13000, cuando son leídos de izquierda a derecha, son formados por dígitos consecutivos y en orden creciente? Ejemplificando, 456 es uno de esos números, más 7890 no lo es.

A) 10 B) 13 C) 18

D) 22 E) 25

Problema 17. Se desea llenar los cuadritos de la figura de forma que la suma de cada tres cuadritos consecutivos sea 21.

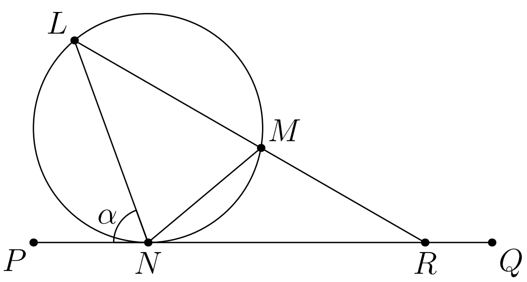
7								6		

¿Qué número debe ir en la segunda casilla?

A) 6 B) 7 C) 8

D) 10 E) 21

Problema 18. En la figura, la recta PQ toca en N al círculo que pasa por L, M y N. La recta LM corta a la recta PQ en R.



Si $LM = LN$ y la medida del ángulo PNL es α, $\alpha > 60°$, ¿cuánto mide el ángulo LRP?

A) $3\alpha - 180°$ B) $180° - 2\alpha$ C) $180° - \alpha$

D) $90° - \dfrac{\alpha}{2}$ E) α

Problema 19. Dentro de los cuadraditos de una cuadrícula de 2×2 se escribe un número. Si la suma de los números del primer renglón es 3, la suma de los números en el segundo renglón es 8 y la suma de los números en la primera columna es 4, ¿cuál es la suma de la segunda columna?

A) 4 B) 7 C) 8

D) 11 E) 15

Problema 20. Hay 60 pájaros en tres árboles. Después de escuchar un disparo vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo que en el primer árbol, y el doble en el tercero respecto al segundo; ¿cuántos pájaros había originalmente en el segundo árbol?

A) 7 B) 11 C) 15

D) 20 E) 24

Problema 21. Véase el problema 23 del nivel 1.

Problema 22. Si H es el área de un hexágono regular de lado 1 y T es el área de un triángulo equilátero de lado 3, ¿cuánto es $\dfrac{H}{T}$?

A) $\dfrac{2}{3}$ B) 2 C) $\dfrac{5}{6}$

D) $\dfrac{3}{4}$ E) 1

Problema 23. Un profesor de inglés da clases a 9 alumnos en un aula, de los cuales, por lo menos uno es ecuatoriano. Si el profesor escoje 4 alumnos para hacer una presentación, tendrá en el grupo, por lo menos dos alumnos de la misma nacionalidad; si escoje 5 alumnos, tendrá como máximo tres alumnos de la misma nacionalidad. ¿Cuántos ecuatorianos hay en la clase?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Problema 24. WQ Radio realiza un concurso durante su transmisión. El concurso consiste en que el locutor de WQ Radio elige, sin comunicar a los oyentes, trece números reales no nulos. Para ganar el concurso los oyentes deben llamar a WQ Radio y responder cuántos números de entre los trece elegidos por el locutor son negativos. El locutor sólo entrega las siguientes pistas a los oyentes:

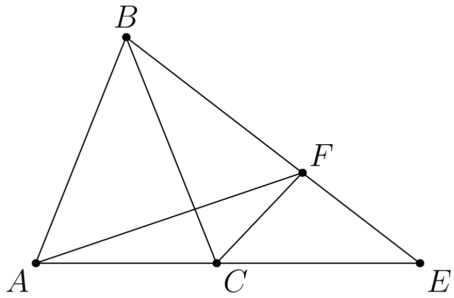
- “He seleccionado trece números reales distintos de cero”
- “Tengo más números positivos que negativos”
- “He armado todas las parejas de números que podía, obteniendo así 78 parejas (resultado de $\frac{13\times 12}{2}$), multipliqué los números de cada pareja para generar 78 resultados en total, de entre todos esos 78 resultados sólo 22 me dieron negativo”

¿Qué número indicarías para ser el ganador del concurso de WQ Radio?

A) 2 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

Problema 25. En un triángulo isósceles ABC, donde $AB = BC$, se ubica el punto E en la prolongación del lado AC (C está entre A y E) y en el segmento BE se ubica el punto F, de tal modo que $AC = CF = EF$ y $\angle BAF = 3 \cdot \angle FAE$.



Hallar la medida de $\angle FAE$.

A) $15°$ B) $16°$ C) $18°$

D) $20°$ E) $30°$

1.1.3 NIVEL 3

Problema 1. Véase el problema 11 del nivel 1.

Problema 2. Véase el problema 9 del nivel 2.

Problema 3. Véase el problema 18 del nivel 1.

Problema 4. Véase el problema 11 del nivel 2.

Problema 5. Véase el problema 12 del nivel 2.

Problema 6. Véase el problema 13 del nivel 2.

Problema 7. Véase el problema 14 del nivel 2.

Problema 8. Véase el problema 15 del nivel 2.

Problema 9. Véase el problema 16 del nivel 2.

Problema 10. Véase el problema 17 del nivel 2.

Problema 11. Javier digitó correctamente un múltiplo de 9 muy grande, con 4030 cifras. De izquierda a derecha, sus cifras son 2014 dígitos 1, un dígito n y 2015 dígitos 2. ¿Cuál es el valor de n?

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

Problema 12. Un número tiene 10 dígitos y la suma de sus dígitos es 9. ¿Cuál es el producto de los dígitos de ese número?

A) 0 B) 1 C) Puede ser más de un resultado, depende del número

D) 45 E) 90

Problema 13. Uno de los tatarabuelos de Daniel nació en la primera mitad del siglo 19 y tenía x años en el año x^2. ¿En qué año nació el tatarabuelo de Daniel?

A) 1804 B) 1805 C) 1806

D) 1807 E) 1808

Problema 14. Las letras E, C, U representan números enteros. Si $E \times C \times U = 240$, $E \times C + U = 46$ y $E + C \times U = 64$, ¿cuánto vale $E + C + U$?

A) 19 B) 20 C) 21

D) 24 E) 36

Problema 15. Véase el problema 18 del nivel 2.

Problema 16. Los enteros positivos x, y satisfacen la ecuación

$$\sqrt{x+\frac{\sqrt{y}}{2}}-\sqrt{x-\frac{\sqrt{y}}{2}}=1$$

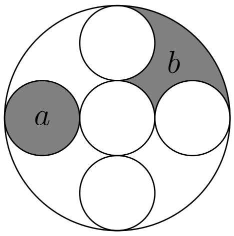
¿Cuál de las alternativas representa un posible valor de y?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Problema 17. Sean $A = 10^{(\log_{10} 2016)^2}$, $B = 2016^3$ y $C = 2^{\sqrt{2016}}$. Entonces:

A) $A < B < C$ B) $A < C < B$ C) $B < A < C$
D) $B < C < A$ E) $C < A < B$

Problema 18. En la figura, todas las circunferencias menores tienen el mismo radio r y los centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia mayor son vértices de un cuadrado.



Sean a y b las áreas sombreadas indicadas en la figura. Entonces la razón $\frac{a}{b}$ es igual a:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 1 E) 2

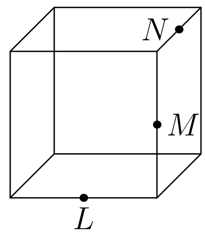
Problema 19. Alexandra adora los números triangulares (o sea, los números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...), tanto que cambió de lugar los números 1, 2, 3, ..., 11 del reloj de pared de su cuarto, de modo que la suma de cada par de números vecinos es un número triangular. Ella dejó al 12 en su lugar original. ¿Qué número ocupa el lugar que era del 6 en el reloj original?

A) 1 B) 4 C) 5
D) 10 E) 11

Problema 20. Siendo a, b, c números reales, por la propiedad distributiva de la multiplicación en relación a la adición, es verdad que: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. La propiedad distributiva de la adición en relación a la multiplicación, $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ no es siempre verdadera, pero ocurre si, y solamente si,

A) $a = b = c = \frac{1}{3}$ o $a = 0$ B) $a = b = c$ C) La igualdad nunca ocurre.
D) $a + b + c = 1$ o $a = 0$ E) $a = b = c = 0$

Problema 21. Los puntos L, M, N son puntos medios de aristas del cubo, como se muestra en la figura.



¿Cuánto mide el ángulo LMN?

A) 90° B) 105° C) 120°

D) 135° E) 150°

Problema 22. Véase el problema 24 del nivel 2.

Problema 23. Trazando las cuatro rectas perpendiculares a los lados de un paralelogramo no rectángulo por sus puntos medios, se obtiene una región del plano limitada por esas cuatro rectas. Podemos afirmar que el área de esa región es igual al área del paralelogramo, si uno de los ángulos del paralelogramo fuera igual a:

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 75° E) 90°

Problema 24. Dos números enteros son llamados *primanos* cuando pertenecen a una progresión aritmética de números primos con por lo menos tres términos. Por ejemplo, los números 41 y 59 son primanos porque pertenecen a la progresión aritmética (41, 47, 53, 59) que contiene solamente números primos. Escoja la alternativa que tiene dos números que **no son** primanos.

A) 7 y 11 B) 13 y 53 C) 41 y 131

D) 31 y 43 E) 23 y 41

Problema 25. Se quieren ubicar los enteros positivos del 1 al 16 en las casillas de una tabla de 4×4 (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y cada fila de la tabla sea impar. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

A) $144 \cdot (8!)^2$ B) $144 \cdot 8!$ C) $16!$

D) $(8!)^2$ E) 144

1.1.4 NIVEL U

Problema 1. Encontrar todos los valores de x que hacen la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sea singular (no invertible).

A) $x \in \{-1, 2\}$ B) $x \in \{1, 2\}$ C) $x \in \{-2, -1\}$

D) $x \in \{-2, 1\}$ E) $x \in \emptyset$

Problema 2. Un triángulo tiene sus vértices A, B, C en las siguientes coordenadas $(4, 0), (-2, 0), (0, 6)$. Hallar las coordenadas de su circuncentro O.

A) $(1, 1)$ B) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ C) $\left(1, \frac{7}{3}\right)$

D) $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ E) $(0, 0)$

Problema 3. Hallar el mínimo de la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ para $x > 0$.

A) $\sqrt[3]{2}$ B) No tiene mínimo en ese intervalo. C) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

D) 2 E) 0

Problema 4. Las temperaturas en Guayaquil y Santa Elena son x° e y°, respectivamente, y éstas no son necesariamente independientes. WQ Radio informa que:

- $P(x^\circ = 25^\circ) = 0.25$
- $P(y^\circ = 25^\circ) = 0.5$
- $P(\max(x, y)^\circ = 25^\circ) = 0.20$

Hallar $P(\min(x, y)^\circ = 25^\circ)$.

A) 0.002 B) 0.450 C) 0.550

D) 0.750 E) 0.950

Problema 5. Hallar cuántas rectas intersecan simultáneamente a las siguientes rectas:

$$\begin{aligned} r_1 &: (x, y, z) = (1, 0, 0)t \quad ; \forall t \in \mathbb{R} \\ r_2 &: (x, y, z) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)t \quad ; \forall t \in \mathbb{R} \\ r_3 &: (x, y, z) = (2, 1, 0) + (0, 0, 1)t \quad ; \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) Infinitas

Problema 6. Sea $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 6\}$. Se denota $\lfloor x \rfloor$ como la parte entera del real x. Hallar

$$\iint_A (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) dA$$

A) 24 B) 72 C) 82

D) 96 E) 120

Problema 7. ¿Cuál es la probabilidad de escoger un número entre 1 y 1000 inclusive y que el número sea divisible para 2, 3 o 5? La respuesta está redondeada a tres decimales.

A) 0.001
B) 0.033
C) 0.266
D) 0.734
E) 1.033

Problema 8. Se sabe que la secuencia $|a_n| < 1$ para todo entero $n > 2016$. Elegir la opción correcta.

A) La secuencia a_n converge pero el límite depende del caso específico.
B) Existe una subsecuencia de a_n que converge.
C) La secuencia a_n converge a un límite independiente de la secuencia.
D) La secuencia a_n converge sólo si es monótona para todo entero positivo n.
E) La secuencia a_n diverge.

Problema 9. Hallar

$$\int_{16}^{20} \left(1 + (t-18)e^{2-|t-18|}\right) dt$$

A) $4 + 2e^2 - 2e^{-2}$
B) 4
C) $8 + 20e^2 - 16e^{-2}$
D) 8
E) 0

Problema 10. La matriz real A de 3×3 tiene los eigenvalores $1, 2, 3$. Hallar $A^3 - 6A^2$ en función de A y la matriz identidad I.

A) A
B) $6I + 9A$
C) $A^3 - 6I$
D) $6I - 11A$
E) $6I - 6A$

Problema 11. Dados los polinomios $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $Q(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$ con $a_1, a_2, a_3, x, y, z \in \mathbb{C}$. Hallar cuántos polinomios distintos $R(x, y, z) = b_1x + b_2y + b_3z$ con $b_1, b_2, b_3, x, y, z \in \mathbb{C}$ existen tales que:

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z)R(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}$$

A) Depende de a_1, a_2, a_3
B) 0
C) 1
D) 2
E) 8

Problema 12. Se sabe que el vector x cumple que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Elegir la opción correcta.

A) No existe x
B) Existe un sólo x
C) Existen más de dos opciones para x, pero son finitas opciones.
D) Existen dos opciones para x.
E) Existen infinitas opciones para x

Problema 13. Hallar el límite de la siguiente serie infinita:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$$

A) No existe el límite
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Problema 14. Sea a una constante compleja distinta a cero. Se define la función

$$P(x) = a(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)^2$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. ¿Cuántas raíces reales distintas tiene la segunda derivada de P?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Problema 15. Hallar el número de parejas de enteros positivos (x, y) tales que

$$\frac{xy}{x+y} = 2016$$

A) 0
B) 1
C) 165
D) 2016
E) Existen infinitas soluciones

Problema 16. Se definen los conjuntos $P_{16} = \left\{\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \ldots, \frac{15}{16}\right\}$ y $P_{625} = \left\{\frac{1}{625}, \frac{2}{625}, \ldots, \frac{624}{625}\right\}$. Se define la distancia entre dos conjuntos A, B como:

$$d(A, B) = \min\{|a-b| \ : \ a \in A, b \in B\}$$

Hallar $d(P_{16}, P_{625})$.

A) No se puede calcular
B) 0
C) 2016
D) $\frac{609}{10000}$
E) $\frac{1}{10000}$

Problema 17. Hallar el número de soluciones en enteros positivos de

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2$$

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) Existen infinitas soluciones

Problema 18. Se eligen al azar y uniformemente dos puntos del intervalo $[0, 1]$ de manera que se forman 3 segmentos. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda formar un triángulo con esos 3 segmentos?

A) 0
B) $\frac{1}{8}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$
E) 1

Problema 19. Se sabe que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{i}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar A^{16}.

A) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 5^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & -5^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{16} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{i}{5} \end{bmatrix}^{16} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{16}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Problema 20. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2016n + i}$$

A) El límite no existe.

B) $\ln\left(\frac{2016}{2015}\right)$

C) $\pi \ln(2016)$

D) $\ln\left(\frac{2017}{2016}\right)$

E) $\frac{1}{2016}$

Problema 21. Hallar el mínimo de la función $f(x, y) = 2x^4 + y^4$ sobre la recta $x + 4y = 9$.

A) 0

B) 3

C) 5

D) 12

E) 18

Problema 22. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{2016} + 2^{2016} + \ldots + n^{2016}}{n^{2017}}$$

A) 0

B) 2016

C) $\frac{1}{2017}$

D) $\frac{1}{2016}$

E) El límite no existe.

Problema 23. La función $y = f(x)$ cumple que $xy" + 2y' + xy = 0, y(\pi) = 0, y(1) = 1$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$.

A) El límite no existe.

B) $\operatorname{sen}(2) + \frac{1}{\pi}$

C) $\frac{1}{\operatorname{sen}(1)}$

D) $\frac{1}{\pi}$

E) 0

Problema 24. A es un subconjunto del grupo finito G, cuya operación de grupo es la multiplicación, y A tiene más de la mitad de los elementos de G. Considerar los siguientes predicados:

I) A es un grupo con la misma operación.

II) Todo elemento de G es igual al producto de dos elementos de A.

Elegir la opción correcta.

A) II es verdadero.

B) II es verdadero si y sólo si el elemento identidad pertenece a A.

C) I y II son verdaderos.

D) I es verdadero.

E) I y II son falsos.

Problema 25. Dada la matriz $A = (a_{ij})$ de 2016×2016 tal que $a_{ij} = 1$ si $j - i \equiv 1 (\text{mod } 2016)$ y $a_{ij} = 0$ de lo contrario. Hallar un eigenvalor de $4A + 2A^T$.

A) 0

B) $4e^{\frac{2\pi i}{2016}} + 2e^{\frac{-2\pi i}{2016}}$

C) $4e^{\frac{4\pi i}{2016}} + 2e^{\frac{-2\pi i}{2016}}$

D) $4e^{\frac{4\pi i}{2016}} + 2e^{\frac{2\pi i}{2016}}$

E) 1

1.2 SEGUNDA FASE

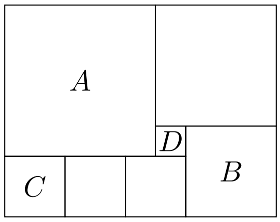
1.2.1 NIVEL 1

Problema 1. Adrián tiene 201 billetes. Si un tercio de ellos son de 1 dólar, otro tercio son de 5 dólares, y el resto son de 10 dólares. ¿Cuántos dólares tiene Adrián?

Problema 2. Si al número x lo multiplicamos por dos, luego duplicamos el resultado otra vez, posteriormente multiplicamos por dos una tercera vez y finalmente lo duplicamos una cuarta vez, el resultado final nos daría 672. Determinar el valor de x.

Problema 3. Quince caracoles participan en una carrera. Cada uno lleva un número del 1 al 15. Durante la carrera, a uno de los caracoles le da hambre y decide salirse de la carrera e ir a un restaurante. La suma de los números de los caracoles que sí terminaron la carrera es un número terminado en 0. ¿Cuál era el número del caracol que fue al restaurante?

Problema 4. El cuadrado C tiene lados de longitud 2. El cuadrado B tiene lados de longitud 3.



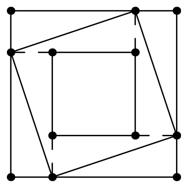
¿Cuántos cuadrados, como máximo, del tipo D entran en el cuadrado A?

Problema 5. Si M y N son números naturales tales que $49 < N < 101$ y $19 < M < 51$. ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $\frac{M+N}{N}$?

Problema 6. Determinar la cantidad de años que deben transcurrir para que la fecha de hoy vuelva a estar en el mismo día de la semana.
Nota: Asuma que no existen años bisiestos.

Problema 7. ¿Cuántos enteros x hay tales que $\dfrac{3150}{x}$ es un cuadrado perfecto?

Problema 8. El cuadrado grande tiene área 16, el cuadrado más pequeño tiene área 4.



Si el cuadrado grande y el pequeño tienen el mismo centro, determine el área del cuadrado intermedio.

Problema 9. ¿Cuál es el menor número primo que se puede expresar como la suma de dos números compuestos?
Nota: Los números compuestos son aquellos números que pueden expresarse como el producto de dos enteros mayores que 1.

Problema 10. Si n puede tomar cualquier valor entero, y se define

$$E = \frac{(-1)^{n+3} - (-1)^{n+2}}{(-1)^{n-1}}$$

¿Cuantos valores puede tener la expresión E?

Problema 11. Calcular la cantidad de enteros positivos que tienen exactamente 4 divisores enteros positivos, de los cuales 2 son números primos menores que 18.

Problema 12. En una fiesta, cada persona apretó la mano a exactamente 7 personas. Si asistieron 24 personas a la fiesta, ¿cuántos apretones de mano hubo?

Problema 13. El siguiente triángulo numérico está formado por todos los números pares en forma correlativa.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & 4 & & 6 & & \\ & 8 & & 10 & & 12 & \\ 14 & & 16 & & 18 & & 20 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Calcular la suma de todos los números ubicados en la fila 15.

Problema 14. En el triángulo ABC se tiene que $\angle A = 60°$. Si las amplitudes del ángulo mayor y del ángulo menor que forman las bisectrices interiores de los otros dos ángulos son α y β respectivamente, determinar $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Problema 15. Javier, siendo un geómetra por excelencia, dibujó en su pizarra 5 rectas y 2 circunferencias. Luego de dibujar estas figuras geométricas, Javier se dio cuenta que habían muchas intersecciones entre ellas. ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección que pueden tener estas siete figuras en total?

1.2.2 NIVEL 2

Problema 1. El número 2016 tiene exactamente 3 factores primos distintos. Hallar la suma de esos 3 números primos.

Problema 2. Si un triángulo equilátero, cuyos lados miden 6, lo corto en triángulos equiláteros pequeños de lados iguales a 1, ¿cuántos triángulos equiláteros pequeños obtengo?

Problema 3. Si escribimos el número 2016 en repetidas ocasiones de manera contínua para generar el siguiente número

$$20162016201620162\,0\ldots$$

¿Cuál es el dígito que se encuentra en la posición 2016?

Problema 4. Véase el problema 6 del nivel 1.

Problema 5. ¿Qué dígito se debe borrar del número 43620 para que el número de 4 dígitos que quede sea múltiplo de 105?

Problema 6. Véase el problema 9 del nivel 1.

Problema 7. Véase el problema 10 del nivel 1.

Problema 8. Véase el problema 11 del nivel 1.

Problema 9. Dados $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{29}$ y $\dfrac{c}{203} = \dfrac{a}{21}$. Encontrar $b - c$.

Problema 10. Véase el problema 12 del nivel 1.

Problema 11. Véase el problema 13 del nivel 1.

Problema 12. Véase el problema 15 del nivel 1.

Problema 13. Sea S la suma de los primeros 2016 cubos perfectos positivos. Calcular el residuo de la división de S para 7.

Problema 14. En la pizarra están escritos los números

$$1, 2, 3 \ldots, 108, 109, 110$$

Si se borran todos los números que son iguales al triple del producto de sus dígitos. ¿Cuántos números quedan?

Problema 15. Por el vértice B de un triángulo ABC se traza la recta L paralela al lado AC. La bisectriz interior del ángulo A corta a L en el punto M y la bisectriz exterior del ángulo C corta a la recta L en el punto N. Si $AB = 24$ y $BC = 36$, calcular MN.

1.2.3 NIVEL 3

Problema 1. Se llaman números *crecientes* a aquellos números naturales que tienen a sus dígitos ordenados de forma creciente de izquierda a derecha. Por ejemplo, 2569 es un número *creciente*, pero 1556, 5421 y 3659 no son *crecientes*. ¿Cuántos números *crecientes* existen entre 1500 y 1900?

Problema 2. Véase el problema 5 del nivel 2.

Problema 3. En un salón de clase hay 10 niñas más que niños. Un día faltaron 3 niñas y 2 niños, y se contó en total 31 alumnos. ¿Cuántos niños asistieron ese día?

Problema 4. Véase el problema 9 del nivel 1.

Problema 5. Hallar la cantidad de valores reales de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \sqrt{\frac{6}{x}}$$

Problema 6. Sea f una función definida en los números reales tal que:

- $f(0) = 3$
- $f(x+2) = f(x) + x + 1 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$

Calcular el valor de $f(2) + f(-2)$.

Problema 7. Véase el problema 12 del nivel 1.

Problema 8. La secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene la propiedad que para cualquier entero positivo n, el promedio de los n primeros números es 2^n. Hallar el promedio de los términos $a_4, a_5, \ldots, a_9$.

Problema 9. Véase el problema 13 del nivel 2.

Problema 10. El polinomio $x^2 - mx - 2$ es divisible para $x - 1$ y el polinomio $x^2 - nx + 2$ es divisible para $x + 1$. Hallar el valor de $m - n$.

Problema 11. Véase el problema 15 del nivel 2.

Problema 12. Sebastián y Daniel comparan la cantidad de monedas que tienen. Sebastián dice: "Si tú me dieras un cierto número de monedas, entonces yo tendría seis veces la cantidad de monedas que a ti te quedarían, pero si yo te diera ese mismo número de monedas, tú tendrías la tercera parte de las monedas que a mi me quedarían". Si se conoce que Sebastián y Daniel tienen al menos una moneda cada uno, ¿cuál es la menor cantidad de monedas que Sebastián puede tener?

Problema 13. Sean a, b y c números reales tales que las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son r_1, r_2 y las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + 3c = 0$ son $\frac{r_1}{r_2}$ y $\frac{r_2}{r_1}$. Calcular el valor de $\left|\frac{a^2}{bc}\right|$.

Problema 14. Se traza la altura CH y la mediana BK en el triángulo acutángulo ABC. Se sabe que los segmentos CH y BK tienen igual medida y que los ángulos $\angle KBC$ y $\angle HCB$ son iguales. Calcular el valor del ángulo $\angle CAB$ en grados.

Problema 15. Se considera el conjunto de palabras (no necesariamente con sentido) que consisten de diez letras, y cada letra es 'a' o 'j'. Por ejemplo, la palabra "jajajajaja" es una palabra que pertenece a este conjunto. Se dice que una palabra perteneciente a este conjunto es *chistosa* si cumple que la cantidad de letras 'a' que vienen inmediatamente luego de una 'j' es mayor que la cantidad de letras 'j' que vienen inmediatamente despues de una 'a'. ¿Cuántas palabras *chistosas* existen?

1.3 TERCERA FASE

1.3.1 NIVEL 1

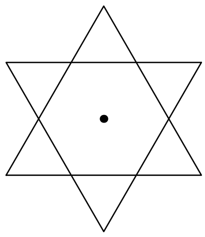
Problema 1. Se tiene el número

$$N = 101010101010...$$

que se forma con unos y ceros de forma alternada. Si se sabe que N tiene 2016 dígitos en total, determinar la suma de los dígitos de N.

Problema 2. Jorge le debe a Vicente 35 centavos y tiene un bolsillo lleno de monedas de 5 centavos, monedas de 10 centavos, y monedas de 25 centavos las cuales puede usar para pagarle. Encontrar la diferencia entre el mayor número de monedas que puede usar y el menor número de monedas que puede usar para pagarle.

Problema 3. Cuando dos triángulos equiláteros comparten un centro común, su unión puede ser una estrella, como la figura.



Su región común es un hexágono regular con área 60. Encontrar el área de uno de los triángulos equiláteros originales.

Problema 4. Demostrar que 93 no se puede escribir como la suma de 2 primos.

Problema 5. Sea P un punto en el interior de un cuadrado $ABCD$. Si las áreas de los triángulos PDA y PBC son 4 y 6 respectivamente, calcular la longitud del lado del cuadrado.

Problema 6. ¿Es posible que la suma de dos primos consecutivos sea el doble de otro primo?

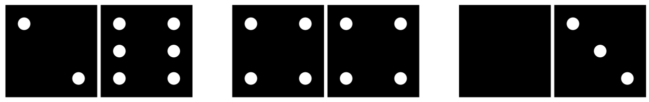
Problema 7. Los números $1, 2, 3, \ldots, 16$ son distribuidos en las casillas de un tablero de 4×4 de tal forma que ningún número se repita. Luego, para cada fila se sombrea con lápiz la casilla que tiene escrito el número mayor y a continuación se hace lo mismo con cada una de las columnas y con cada una de las dos diagonales. ¿Cuál es el menor número de casillas que quedarán sombreadas al terminar el proceso, cualquiera que sea la distribución de los 16 números en las casillas?

1.3.2 NIVEL 2

Problema 1. Determinar la suma de los dígitos del número

$$\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{2^4}{2^3}+\ldots+\frac{2^{2015}}{2^{2014}}+\frac{2^{2016}}{2^{2015}}$$

Problema 2. El juego de dominó está formado por 28 piezas rectangulares distintas, cada una con dos partes, con cada parte de 0 a 6 puntos. Por ejemplo, vea tres de esas piezas:



¿Cuál es el número total de puntos entre todas las piezas?

Problema 3. El máximo común divisor de dos números es 60, y su producto es $\overline{7d00}$, donde d es un dígito. Hallar la suma de esos dos números.

Problema 4. Véase el problema 6 del nivel 1.

Problema 5. En el lado BC de un triángulo ABC se ubica un punto P de manera que $AB+BP=PC$. Sea R el punto medio de AC. Si la medida del ángulo RPC es 43°, hallar la medida del ángulo ABC.

Problema 6. Hay nueve sillas en una fila que serán ocupadas por seis estudiantes y tres profesores: Alfredo, Fernando y Julio. Estos tres profesores llegan antes que los seis estudiantes y deciden escoger sus sillas de tal forma que cada profesor se ubique entre dos estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden Alfredo, Fernando y Julio escoger sus sillas?

Problema 7. Se tienen n números naturales consecutivos de cinco dígitos cada uno y tales que ninguno de ellos puede ser expresado como el producto de dos números naturales de tres dígitos. Hallar el mayor valor posible de n.

1.3.3 NIVEL 3

Problema 1. Véase el problema 2 del nivel 2.

Problema 2. Los números a, b y c son enteros positivos tales que:

$$a^2 + \frac{1}{b} + c = 39$$
$$a^2 + \frac{1}{b} - c = 13$$

Calcular el valor de $a^2 - \dfrac{1}{b} + 2c$.

Problema 3. En el triángulo ABC la bisectriz del ángulo ABC intersecta al lado AC en el punto D, la bisectriz del ángulo BDC intersecta al lado BC en el punto E. Si la bisetriz del ángulo BED es perpendicular al lado AB, y además $\angle ACB = 26°$, calcular $\angle ADE$.

Problema 4. Véase el problema 6 del nivel 2.

Problema 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + b + c = 1$ y $ab + bc + ca = \dfrac{1}{3}$. Hallar el valor de

$$\frac{7a}{b+1} + \frac{6b}{c+1} + \frac{3c}{a+1}$$

Problema 6. Véase el problema 7 del nivel 2.

Problema 7. Sea n un entero positivo y sea X un conjunto de $n + 2$ enteros, cada uno de ellos con valor absoluto menor o igual a n. Demostrar que existen tres números distintos $a, b, c \in X$ tales que $a + b = c$.

1.4 FASE FINAL

1.4.1 NIVEL 1

Día 1

Problema 1. Adrián hace una lista de los enteros positivos que no son divisibles para 3. Inicia escribiendo el 1, después el 2, luego el 4 y así sucesivamente. ¿Qué número se va a encontrar en el puesto 2016?

Problema 2. Andrea le dice a Daniel que ella ha escrito en su cuaderno 5 enteros positivos distintos y también le dice la suma de esos 5 números. Con esa información Daniel puede saber con seguridad qué números escribió Andrea. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la suma de los números escritos en el cuaderno de Andrea?

Problema 3. Un cuadrado de lado n se divide en n^2 casillas de lado 1, cada una coloreada de amarillo, azul o rojo. Hallar el menor valor de n tal que para cualquier forma de colorear las casillas del cuadrado, exista una fila o una columna con al menos tres casillas del mismo color.

Día 2

Problema 4. En una pizarra están escritos los números naturales del 1 al 9. Diana borra cuatro números, Paola borra otros cuatro y queda un número x sin borrar. Si se sabe que la suma de los números borrados por Paola es el triple de la suma de los números borrados por Diana, ¿cuáles son todos los posibles valores de x?

Problema 5. Se tienen 40 puntos en el plano, donde no hay tres colineales. A cada punto se le asigna un número del 1 al 40 sin repetición. Luego se une cada par de puntos mediante segmentos de recta de colores amarillo, azul o rojo, de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si la suma de los números asignados a los puntos es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color amarillo.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 1 es un múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color azul.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 2 es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color rojo.

¿Cuántos triángulos se han formado con sus tres lados de colores distintos?

Problema 6. En el paralelogramo $ABCD$, una recta que pasa por C corta a la diagonal BD en E y AB en F. Si F es el punto medio de AB y el área de $\triangle BEC$ es 100, hallar el área del cuadrilátero $AFED$.

1.4.2 NIVEL 2

Día 1

Problema 1. Un número natural de cinco dígitos se lo llama *ecuatoriano* si cumple las siguientes condiciones:

- Todos sus dígitos son distintos.
- El dígito que se encuentra en el extremo izquierdo es igual a la suma de los otros cuatro dígitos.

Ejemplo: 91350 es un número *ecuatoriano* ya que $9 = 1+3+5+0$, pero 54210 no lo es ya que $5 \neq 4+2+1+0$. Hallar cuántos números *ecuatorianos* existen.

Problema 2. Demostrar que no existen enteros positivos x, y tales que:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 = y^2$$

Problema 3. Sea $P_1P_2\ldots P_{2016}$ un polígono concíclico de 2016 lados. Sea K un punto en el interior del polígono y sea M el punto medio del segmento $P_{1000}P_{2000}$. Sabiendo que $KP_1 = KP_{2011} = 2016$ y KM es perpendicular a $P_{1000}P_{2000}$, hallar la longitud del segmento KP_{2016}.

Día 2

Problema 4. A continuación se muestran dos sumas, cada una de ellas formada por n sumandos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$
$$T = 100 + 98 + 96 + 94 + \ldots$$

¿Para qué valor de n se cumple que $S = T$?

Problema 5. Véase el problema 6 del nivel 1.

Problema 6. Determinar la cantidad de enteros positivos $N = \overline{abcd}$, con a, b, c, d dígitos no nulos, que satisfacen

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) = 2abcd - 1$$

1.4.3 NIVEL 3

Día 1

Problema 1. Véase el problema 2 del nivel 2.

Problema 2. Se trazan todas las diagonales en un polígono convexo de 2017 lados. Una recta l interseca a dicho polígono pero no pasa por ninguno de sus vértices. Demostrar que la recta l interseca a un número par de diagonales de dicho polígono.

Problema 3. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos sobre una recta L, de tal modo que $AB = BC = CD$. En uno de los semiplanos determinados por la recta L, se eligen los puntos P y Q de tal manera que el triángulo CPQ es equilátero con sus vértices nombrados en sentido horario. Sean M y N dos puntos del plano tales que los triángulos MAP y NQD son equiláteros (los vértices también están nombrados en sentido horario). Hallar el valor en grados del ángulo $\angle MBN$.

Día 2

Problema 4. Véase el problema 6 del nivel 1.

Problema 5. Véase el problema 6 del nivel 2.

Problema 6. Un entero positivo n es *"olímpico"* si existen n enteros no negativos $x_1, x_2, ..., x_n$ que cumplen que:

- Existe al menos un entero positivo $j : 1 \leq j \leq n$ tal que $x_j \neq 0$.
- Para cualquier manera de escoger n números $c_1, c_2, ..., c_n$ del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, donde no todos los c_i son iguales a cero, se cumple que la suma $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ no es divisible para n^3.

Hallar el mayor entero positivo *"olímpico"*.

1.4.4 NIVEL U

Día 1

Problema 1. Sea P un polinomio con coeficientes complejos de grado 3. Se sabe que dos de sus raíces están ubicadas en dos puntos fijos distintos A, B en el plano complejo. Si la tercera raíz se mueve sobre una recta fija r en el plano complejo, demostrar que el lugar geométrico de la raíz de la segunda derivada de P es una recta paralela a r en el plano complejo.

Problema 2. Para cada entero positivo con n^2 dígitos decimales, se asocia el determinante de la matriz obtenida al escribir sus dígitos en orden siguiendo las filas. Por ejemplo para $n = 2$, el entero 2016 se asocia con

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 12$$

Hallar, como función de n, la suma de todos los determinantes asociados con los enteros positivos de n^2 dígitos. Nota: El primer dígito tiene que ser diferente de 0, por ejemplo para $n = 2$, hay 9000 determinantes.

Problema 3. Demostrar que:

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

converge y hallar su valor.

Día 2

Problema 4. Hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$$

Problema 5. Varios niños están jugando al teléfono. El niño C_0 susurra 3 palabras al niño C_1, que susurra lo que escuchó al niño C_2 y así sucesivamente hasta que el mensaje llega al niño C_n. Cada una de las 3 palabras tiene exactamente una palabra *"gemela"*, es decir que los niños pueden confundirlas.
Cada niño $i + 1$ tiene la probabilidad de $\frac{1}{2}$ de oír correctamente lo que el niño i dijo, tiene $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la primera palabra dicha por el niño i por su *"gemela"*, $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la segunda palabra y $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la tercera palabra. Note que nunca se cambia más de una palabra y que el mensaje puede ser accidentalmente corregido.
Calcular la probabilidad de que el niño C_n escuche exactamente el mensaje original.

Problema 6. Sea F un campo de p^2 elementos donde p es un primo impar. Se asume que existe un conjunto S con $\frac{p^2-1}{2}$ elementos distintos y no nulos pertenecientes a F con la propiedad: para todo $a \neq 0$ en F, exactamente uno de los números a y $-a$ pertenece a S. Sea N el número de elementos en la intersección $S \cap \{2a : a \in S\}$. Demostrar que N es par.

2 SOLUCIONES

2.1 PRIMERA FASE

2.1.1 NIVEL 1

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	A	6	E	11	D	16	B	21	C
2	E	7	D	12	B	17	B	22	E
3	C	8	A	13	E	18	C	23	D
4	E	9	D	14	E	19	B	24	D
5	B	10	E	15	D	20	A	25	E

Solución del problema 1: Los números divisibles por 13 van de 13 en 13, como 119268916 es divisible por 13 entonces el número 119268903 también es divisible por 13 porque está a 13 unidades de distancia, por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 2: Mil millones es igual a 1000000000 y un millón de millones es igual a 1000000000000 por lo que la diferencia entre ambos es $1000000000000 - 1000000000 = 999000000000$, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 3: Como luego del primer silbido todos se forman en 5 filas de 6 monos cada uno exactamente entonces hay un total de $5 \times 6 = 30$ monos, luego cuando se forman 10 filas quedarán en cada fila una cantidad de $30 \div 10 = 3$ monos, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 4: Como en 8 segundos hace 6 saltos en total entonces para hacer 1 salto se demora $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ de segundo, por lo que 15 saltos se demorará $\frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ segundos, con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 5: Veamos que

$$\begin{aligned}
&11111111 - 1111111 + 111111 - 11111 + 1111 - 111 + 11 - 1\\
&= (11111111 - 1111111) + (111111 - 11111) + (1111 - 111) + (11 - 1)\\
&= 10000000 + 100000 + 1000 + 10\\
&= 10101010
\end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 6: Como nos dicen que ninguna de las retiradas es negra entonces nos quedamos con las opciones de 3 medias rojas y 2 blancas. Ahora veamos que es imposible obtener las 3 blancas ya que no tenemos suficientes medias blancas por lo que siempre se tendrá una roja, es decir que la respuesta es E.

Solución del problema 7: Si la primera balanza es duplicada tendríamos 6 △ y 2 ◯ en la izquierda y a la derecha se tendrían 12 □.
Ahora sumemos la primera balanza duplicada con la segunda balanza y se obtendría una balanza con el lado izquierdo con 8 △ y 6 ◯ y a la derecha se tendrían 20 □. Finalmente vamos a dividir para 2 esta última balanza obtenida para así quedarnos con una balanza que a la izquierda tendría 4 △ y 3 ◯ pero a la derecha se tendrían 10 □, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 8: Veamos que $\frac{1}{5}$ del total previsto es $100000 \cdot \frac{1}{5} = 20000$ y $\frac{1}{4}$ del total previsto es $100000 \cdot \frac{1}{4} = 25000$, por lo que la pérdida del agricultor estuvo entre 25000 y 20000, y el único valor que está en este rango de valores es \$21987.53 por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 9: Para determinar el valor que se encuentra justo en la mitad entre dos números se puede usar el promedio ya que este determina el valor intermedio entre dos valores, por lo que Carlos se detuvo en $\frac{100+1000}{2} = 550$, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 10: Notamos que el el largo del rectángulo pequeño es igual a dos veces su ancho. Esto quiere decir que cada rectángulo es de $2x \times x$, implicando que el rectángulo grande es de $3x \times 4x$, donde $21 = 3x$ y $x = 7$. Se concluye que el área es de $21 \times 28 = 588\text{cm}^3$, con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 11: De 6pm a 11pm pasaron 5 horas por lo que el recorrido completo duró 5 horas 20 min, la mitad de 5 hrs y 20 min son 2h30min y 10 min respectivamente. Al sumar los resultados anteriores notamos que la mitad del recorrido se da 2 horas y 40 min después de las 6 pm a las 08:40 pm, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 12: La respuesta es la B.

Solución del problema 13: El producto de cuatro naturales consecutivos es

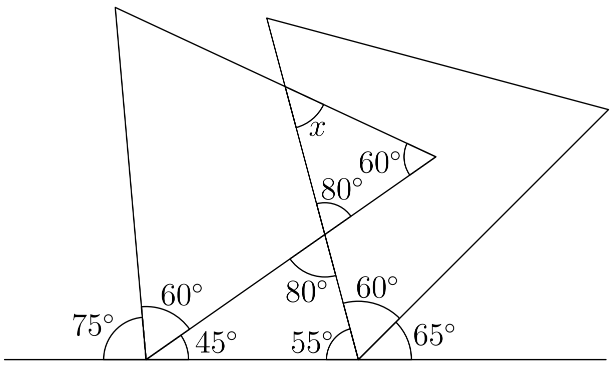
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

Lo que indica que es un cuadrado perfecto menos 1, y solo $1680 = 41^2 - 1 = 5 \times 6 \times 7 \times 8$ cumple, con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 14: Frente a Raúl llegaron 9 niños, por lo que detrás de él llegaron 18, al ser Raúl el 10mo, se concluye que participaron 28 niños con lo que la respuesta es la E.

Solución del problema 15: Los primeros tres cuadrados perfectos de 2 cifras son 16, 25 y 36. La diferencia entre 25 y 36 es 11 y va aumentando cada que elegimos cuadrados perfectos mayores. Como solo son 10 sillas, en ellas deben estar los siguientes diez números $16, 17, \ldots, 24, 25$ y la suma de los cuadrados es $16 + 25 = 41$. Se concluye que la respuesta es D.

Solución del problema 16: Notemos primero que todos los ángulos internos de ambos triángulos equiláteros son iguales a $60°$. Lo anterior más el hecho que un ángulo llano es igual a $180°$ nos da los ángulos de $45°$ y $55°$ del triángulo rojo, implicando que su tercer ángulo es igual a $80°$ por suma interna. Con este ultimo dato, podemos despejar el ángulo que nos piden usando suma interna en el triángulo azul: $\angle x = 180 - 60 - 80 = 40°$.



Por lo que la respuesta es B.

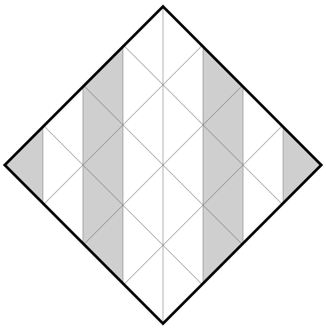
Solución del problema 17: Como la casa roja solo tiene una casa al lado significa que la casa roja está a un extremo. La casa azul está junto a la amarilla y roja pero la roja está a un extremo, entonces la amarilla está en la posición 3. Las dos posibles configuraciones son: Roja, Azul, Amarilla, Blanca, Gris; ó Gris, Blanca, Amarilla, Azul, Roja. Por lo que la respuesta es B.

Solución del problema 18: El número primo debe tener un dígito impar distinto de 5 en sus unidades y como el dígito de las decenas es máximo 9, para que juntos sumen 11, el de las unidades debe ser mayor o igual a 2. Esto nos deja como candidatos a $\{83, 47, 29\}$, de los cuales los 3 son primos. Se concluye que la respuesta es C.

Solución del problema 19: El cerrajero usa 2000 centímetros de varilla y cada pieza tiene 45 centímetros, además $2000 = 44 \times 45 + 20$. Esto implica que se usan 44 piezas iguales y 20 centímetros sobrantes por lo que la respuesta es B.

Solución del problema 20: Notemos que el problema indica que el reloj no es normal porque va en sentido antihorario. Sin embargo, verlo en el espejo "corrije" la posición de sus manecillas, implicando que la posición de sus manecillas se debe ver como un reloj normal. Se concluye que la respuesta es la A.

Solución del problema 21: Dividimos la imagen en 32 triángulos rectángulos congruentes como indica la figura. Es fácil ver que solo hay que contar triángulos: $\frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área total}} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$, con lo que la respuesta es C.



Solución del problema 22: La siguiente tabla reúne el hecho que la ciudad A no ha cambiado, que la población de A hace 3 años es la misma que la de hoy de B, y que en 3 años B aumentó su población en un 50%.

	3 años atrás	Hoy
A	$\frac{150}{100}x$	$\frac{150}{100}x$
B	x	$\frac{150}{100}x$

Como actualmente las dos ciudades suman 9000 habitantes:

$$\begin{aligned} \frac{150}{100}x + \frac{150}{100}x &= 9000 \\ \implies \frac{300}{100}x &= 9000 \\ \implies x &= 3000 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que hace 3 años las dos ciudades sumaban $\frac{150}{100}(3000) + (3000) = 7500$, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 23: El volumen de una caja de zapatos es $1 \times 2 \times 3 = 6$. El volumen del cubo que queremos construir debe ser $6k = n^3$, donde k es la cantidad de cajas de zapatos que se usarán y n es la longitud de uno de los lados del cubo. Como $6 = 2 \times 3$, k debe ser como mínimo $2^2 \cdot 3^2 = 36$ para completar el cubo perfecto que se lograría con $n = 6$. Para encontrar un ejemplo que cumpla con 36 cajas solo hay que ubicarlas todas en la misma orientación. Por lo tanto la respuesta es D.

Solución del problema 24: Hay $\frac{600}{3} = 200$ y $\frac{600}{4} = 150$ múltiplos de 3 y 4, respectivamente, que sean menores o iguales que 600. Su suma nos daría 350; sin embargo, aquí contamos dos veces cada múltiplo de 12. Como hay $\frac{600}{12} = 50$ múltiplos de 12, eso nos deja con 300 números que son múltiplos de 3 o de 4. Con esto, solo 300 páginas serán impresas con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 25: WQRADIO en orden alfabético es ADIOQRW. La lista de todos los reordenamientos tiene $7! = 5040$ palabras. Hay $6! = 720$ palabras que empiezan con A, D, I, respectivamente, dando un total de 2160 palabras. La palabra 2161 es la primera palabra que comienza con O, con las demás letras en orden alfabético, por lo que la respuesta es E.

2.1.2 NIVEL 2

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	B	6	D	11	D	16	D	21	D
2	B	7	E	12	A	17	C	22	A
3	E	8	B	13	B	18	A	23	C
4	D	9	E	14	B	19	B	24	A
5	A	10	C	15	C	20	D	25	C

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 5 del nivel 1.

Solución del problema 2: Se sabe que Janet le lleva 5 años de ventaja a Julio, pero como Janet tiene dos veces la edad de Julio, se concluye que la ventaja de edad de Janet coincide con la edad de Julio, con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 3: Véase la solución del problema 10 del nivel 1.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 9 del nivel 1.

Solución del problema 5: En total hay 4 litros en el recipiente. En el litro de jugo, el problema indica que 0.8 litros son agua, más los otros 3 litros tenemos un total de 3.8 litros de agua en el recipiente, dejando 0.2 litros de pulpa. El porcentaje de volumen final es $\frac{0.2}{4} \times 100\% = 5\%$. Por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 6: Véase la solución del problema 11 del nivel 1.

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 14 del nivel 1.

Solución del problema 8: Véase la solución del problema 17 del nivel 1.

Solución del problema 9: Usando el Principio Multiplicativo, al cada pregunta tener 2 elecciones y haber 5 preguntas, hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ formas de adivinar las preguntas de su examen, con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 10: Véase la solución del problema 18 del nivel 1.

Solución del problema 11: La proporción (Producto:Precio) es (2:1.5). Ésta última equivale a (4:3), con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 12: Si la cantidad de políticos deshonestos es mayor que 1, se podría elegir una pareja de políticos donde ninguno es deshonesto. Esto último contradice el tercer punto del enunciado. Como hay mínimo un político deshonesto, se concluye que la respuesta es la A.

Solución del problema 13: Sea $\overline{ab}$ el número que Omar escribió en la pizarra. Se lo intercambia de dígitos ($\overline{ba}$), se lo duplica ($2 \cdot \overline{ba}$) y se le suma 10 y ese resultado debe dar $\overline{ab}$. Es decir $2 \cdot \overline{ba} + 10 = \overline{ab}$, por lo que podemos concluir que $\overline{ab}$ es par. Adicionalmente tenemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overline{ba} + 10 = \overline{ab} &< 100 \\ 2 \cdot \overline{ba} &< 90 \\ \overline{ba} &< 45 \\ 1 \leq b &\leq 4. \end{aligned}$$

Lo cual nos deja con las opciones 51, 62, 73 y 84, de los cuales solo 62 y 84 son pares. De aquí nos queda comprobar que solo 62 cumple las condiciones del problema. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 14: El perímetro de cada cuadrado es igual a la longitud del alambre del respectivo cuadrado, implicando que la razón continúa siendo 4:3, con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 15: Usando el Principio de Reordenamiento: como $240 \leq 300 \leq 400$ y $\frac{1}{80} \leq \frac{1}{75} \leq \frac{1}{40}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{240}{40} + \frac{300}{75} + \frac{400}{80} \leq \text{ Tiempo Total } &\leq \frac{240}{80} + \frac{300}{75} + \frac{400}{40} \\ 15 \leq \text{ Tiempo Total } &\leq 17 \end{aligned}$$

Por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 16: Separamos casos según el número de dígitos:

- Números de 2 dígitos.
  El menor es 12 y el mayor es 89, por lo que hay 8 números.
- Números de 3 dígitos.
  El menor es 123 y el mayor es 789, por lo que hay 7 números.
- Números de 4 dígitos.
  El menor es 1234 y el mayor es 6789, por lo que hay 6 números.
- Números de 5 dígitos.
  El único es 12345, por lo que hay 1 número.

Por lo tanto, hay $8 + 7 + 6 + 1 = 22$ números que cumplen, con lo que la respuesta es D.

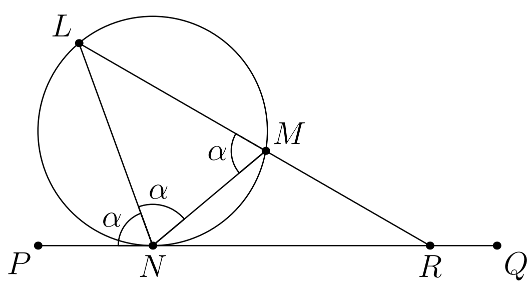
Solución del problema 17: Los números en la 1era 2da y 3era casilla deben sumar lo mismo que la 2da, 3era y 4ta, implicando que la 1era casilla es igual a la 4ta. Realizando este proceso varias veces obtenemos: Notamos que, como en las últimas tres casillas deben sumar 21, la última casilla debe ser igual a 8. Esto nos

7			7			7		6	7	

permite completar las casillas que faltan Con lo que la respuesta es C.

7	8	6	7	8	6	7	8	6	7	8

Solución del problema 18: Tenemos que $\angle LRP + \angle RNM = \angle LMN \implies \angle LRP = \angle LMN - \angle RNM$. Por ángulo semi-inscrito $\angle LMN = \angle LNP = \alpha$ y como $LM = LN$, el triángulo LNM es isósceles y $\angle LNM = \angle LMN = \alpha$. Para completar $180°$ se tiene que $\angle RNM = 180° - 2\alpha$.



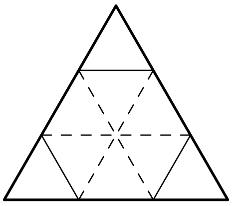
Por lo dicho en el comienzo $\angle LRP = \angle LMN - \angle RNM = \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 180°$. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 19: Si sumamos los números del primer y segundo renglón obtenemos 11 que es la suma total. Si la suma de los números de la primera columna es 4, la segunda columna debe ser 7 para completar los 11. Por lo que la respuesta es la B.

Solución del problema 20: Después del disparo los pájaros está en proporción 1:2:4 y como volaron $6+8+4=18$ pájaros, actualmente hay $60-18=42$ pájaros. Ampliamos la proporción para que la suma sea 42 y nos queda 6:12:24, con lo que el segundo árbol tiene 12 pájaros entonces originalmente habían $12+8=20$ pájaros, por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 21: Véase la solución del problema 23 del nivel 1.

Solución del problema 22: En la figura podemos notar que el triangulo equilátero de lado 3 tiene 9 triángulos equilateros de lado 1 en su interior, mientras que el hexágono solo tiene 6 por lo que $\frac{H}{T}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Por lo que la respuesta es A.



Solución del problema 23: Si por cada 5 alumnos hay como máximo 3 de la misma nacionalidad, quiere decir que cada nacionalidad tiene un máximo de 3 alumnos y como hay 9 alumnos en total, inferimos que hay un mínimo de 3 nacionalidades. Por otro lado, si de cada 4 alumnos hay por lo menos dos de la misma nacionalidad, significa que como máximo hay 3 nacionalidades. En conclusión, hay 3 nacionalidades de 3 alumnos cada uno. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 24: Sabemos que entre positivos y negativos hay 13 números y que, como la única forma de lograr un producto negativo es si ambos tienen distinto signo, se forman 22 parejas distintas entre positivos y negativos. Esto implica que

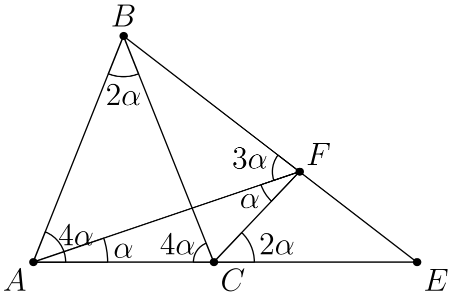
$$\begin{cases} P+N=13 \\ P\cdot N=22 \\ P>N \end{cases}$$

Entonces $N=13-P$ luego $P(13-P)=22 \Rightarrow 13P-P^2=22 \Rightarrow 0=P^2-13P+22 \Rightarrow 0=(P-2)(P-11) \Rightarrow P-2=0$ o $P-11=0 \Rightarrow P=2$ o $P=11$.

Si $P=2 \Rightarrow N=11$ pero esto no cumple que $P>N$.

Si $P=11 \Rightarrow N=2$, con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 25: Sea $\angle FAE=\alpha$ y usando el hecho que $\triangle ACF$ es isósceles, tenemos que $\angle AFC=\alpha$, $\angle ECF=2\alpha$. Además, $\triangle CFE$ es isósceles por lo que $\angle FEC=2\alpha$ y por ángulo externo $\angle BFC=4\alpha=\angle BFA+\alpha$. Esto implica que $\angle BFA=3\alpha$, que junto a datos del problema que indican que $\angle FAB=3\alpha$ se sigue que $\triangle AFB$ es isósceles con $BF=BA=BC$ con lo que B es el circuncentro del $\triangle ACF$, lo que implica que $\angle ABC=2\angle AFC=2\alpha$. Como $\triangle ABC$ es isósceles, $\angle CAB=\angle BCA=4\alpha$, lo que nos da la suma de los ángulos internos del triángulo ABC que $4\alpha+4\alpha+2\alpha=180°$ y en conclusión $\alpha=18°$.



Por lo que la respuesta es C.

2.1.3 NIVEL 3

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	D	6	B	11	B	16	C	21	C
2	E	7	B	12	A	17	C	22	A
3	C	8	C	13	C	18	D	23	B
4	D	9	D	14	B	19	C	24	B
5	A	10	C	15	A	20	D	25	A

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 11 del nivel 1.

Solución del problema 2: Véase la solución del problema 9 del nivel 2.

Solución del problema 3: Véase la solución del problema 18 del nivel 1.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 11 del nivel 2.

Solución del problema 5: Véase la solución del problema 12 del nivel 2.

Solución del problema 6: Véase la solución del problema 13 del nivel 2.

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 14 del nivel 2.

Solución del problema 8: Véase la solución del problema 15 del nivel 2.

Solución del problema 9: Véase la solución del problema 16 del nivel 2.

Solución del problema 10: Véase la solución del problema 17 del nivel 2.

Solución del problema 11: La suma de los dígitos de Javier debe seguir siendo un múltiplo de 9, por lo tanto $2014 \cdot 1 + 2015 \cdot 2 + n = 6044 + n = 671 \cdot 9 + 5 + n$, lo cual obliga a que n sea igual a 4, con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 12: Si los 10 dígitos fuesen distintos de 0, su suma daría mayor o igual a 10, lo que obliga a que exista al menos un dígito 0, haciendo que el producto sea 0, con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 13: Para calcular el año en el que naciste, solo resta tu edad al año actual. El tatarabuelo de Daniel nació en el año $x^2 - x = (x-1)x$. Sabemos que $41 \times 42 = 1722$, $42 \times 43 = 1806$, $43 \times 44 = 1892$. Por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 14: Como

$$ECU = 240 \Rightarrow EC = \frac{240}{U}$$

Pero

$$EC + U = 46 \Rightarrow \frac{240}{U} + U = 46 \Rightarrow 240 + U^2 = 46U \Rightarrow U^2 - 46U + 240 = 0 \Rightarrow (U-40)(U-6) = 0$$

De donde $U = 40$ o $U = 6$.

Caso 1: $U = 40$

$$\Rightarrow EC = 6 \Rightarrow E = \frac{6}{C}$$

Pero $E + CU = 64$

$$\Rightarrow \frac{6}{C} + 40C = 64 \Rightarrow 6 + 40C^2 = 64C \Rightarrow 3 - 32C + 20C^2 = 0 \Rightarrow (10C-1)(2C-3) = 0 \Rightarrow C \notin \mathbb{Z}$$

Caso 2: $U = 6$

$$\Rightarrow EC = 40 \Rightarrow E = \frac{40}{C}$$

Pero $E + CU = 64$

$$\Rightarrow \frac{40}{C} + 6C = 64 \Rightarrow 40 + 6C^2 = 64C \Rightarrow 20 - 32C + 3C^2 = 0 \Rightarrow (C-10)(3C-2) = 0 \Rightarrow C = 10$$

Luego $E = 4 \Rightarrow E + C + U = 4 + 10 + 6 = 20$, con lo que la respuesta correcta es B.

Solución del problema 15: Véase la solución del problema 18 del nivel 2.

Solución del problema 16:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x + \frac{\sqrt{y}}{2}} - \sqrt{x - \frac{\sqrt{y}}{2}} = 1 \\
&\iff x + \frac{\sqrt{y}}{2} + x - \frac{\sqrt{y}}{2} - 2\sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{y}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)} = 1 \\
&\iff 2x - 2\sqrt{x^2 - \frac{y}{4}} = 1 \\
&\iff 2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - \frac{y}{4}} \\
&\iff (2x-1)^2 = 2^2\left(x^2 - \frac{y}{4}\right) \\
&\iff 4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x^2 - \frac{y}{4}\right) \\
&\iff 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - y \\
&\iff -4x + 1 = -y \\
&\iff 4x - 1 = y
\end{aligned}$$

Entonces y es un múltiplo de 4 menos 1, con lo que 7 es un posible valor de y, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 17: Veamos que

$$A = \left(10^{\log_{10} 2016}\right)^{\log_{10} 2016} = 2016^{\log_{10} 2016} > 2016^3 = B$$

Entonces $A > B$.

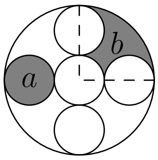
Por otro lado se tiene que

$$C = 2^{\sqrt{2016}} > 2^{44} = \left(2^{11}\right)^4 = 2048^4 > 2016^4 > 2016^{\log_{10} 2016} = \left(10^{\log_{10} 2016}\right)^{\log_{10} 2016} = 10^{(\log_{10} 2016)^2} = A$$

Entonces $C > A$.

Con lo cuál se puede concluir que $B < A < C$ por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 18:

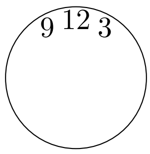


Veamos que $a = \pi r^2$, y por otro lado

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4}\left(\pi(3r)^2\right) - \pi r^2 - \frac{1}{4}(\pi r^2) \\ &= \frac{9}{4}\pi r^2 - \pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

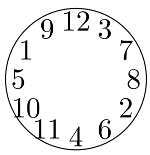
De donde $a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$, por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 19: Es claro que a los lados del 12 deben estar el 3 y el 9, en este problema no importa cuál se pone a la derecha o a la izquierda del 12, ya que el reloj es simétrico con respecto a la vertical que pasa por el 12 y el lugar donde se encontraba el 6.



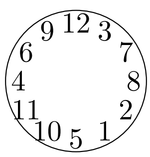
Ahora veamos que el 3 solo puede tener a su lado al 3, 7 o al 12, entonces el que continúa es el 7. Luego el 7 solo puede tener a su lado al 3 o al 8, entonces el que continúa es el 8. Posterior a esto el 8 solo puede tener a su lado al 2 o al 7, entonces el que continúa es el 2. Por otro lado el 9 solo puede tener a su lado al 1, 6 o al 12, con lo que se tienen dos casos:

Caso 1: El 9 tiene a su lado al 1. Luego el 1 solo puede tener a su lado al 2, 5 o al 9, entonces el que continúa es el 5. Así el 5 solo puede tener a su lado al 1, 5 o al 10, entonces el que continúa es el 10. Pero el 10 solo puede tener a su lado al 5 o al 11, entonces el que continúa es el 11. Pero el 11 solo puede tener a su lado al 4 o al 10, entonces el número que va en la posición en la que estaba originalmente el 6 es el 4 y para completar habría que poner el 6 en el espacio faltante.



Pero veamos que los números 2 y 6 están juntos y $2 + 6 = 8$ no es un número triangular, entonces este caso 1 no se cumple lo que pide el problema.

Caso 2: El 9 tiene a su lado al 6. Luego el 6 solo puede tener a su lado al 4 o al 9, entonces el que continúa es el 4. Así el 4 solo puede tener a su lado al 2, 6 o al 11, entonces el que continúa es el 11. Pero el 11 solo puede tener a su lado al 4 o al 10, entonces continúa el 10. Veamos que el 10 solo puede tener a su lado al 5 o al 11, entonces continúa el 5 y finalmente se completa el reloj con el 1.



Se puede comprobar que se cumplen las condiciones del problema, por lo que la respuesta correcta es C.

Solución del problema 20: Veamos que

$$\begin{aligned}
&a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)\\
&\iff a+bc=a^2+ac+ab+bc\\
&\iff a=a^2+ac+ab\\
&\iff 0=a^2+ac+ab-a\\
&\iff 0=a(a+b+c-1)\\
&\iff a=0 \quad o \quad a+b+c-1=0
\end{aligned}$$

Con lo que solo se cumple si y sólo si $a=0$ o $a+b+c=1$, por lo que la respuesta correcta es D.

Solución del problema 21: Sin pérdida de generalidad supongamos que las aristas del cubo miden 2, entonces $ML=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $MN=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ y $NL=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$.

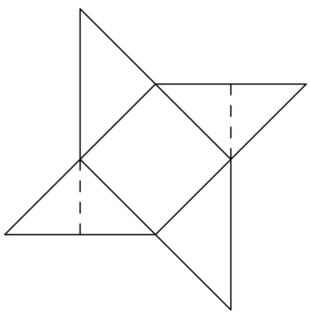
Por la Ley de Coseno se tiene

$$\begin{aligned}
&NL^2=ML^2+MN^2-2\cdot ML\cdot MN\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow \sqrt{6}^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow 6=2+2-2\cdot 2\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow 6=4-4\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow \frac{6-4}{-4}=\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow -\frac{1}{2}=\cos\angle LMN\\
&\Rightarrow \angle LMN=120^\circ
\end{aligned}$$

Por lo que la respuesta correcta es C.

Solución del problema 22: Véase la solución del problema 24 del nivel 2.

Solución del problema 23: Se va a aprovechar que el problema es de opción múltiple y se va a comprobar si el valor de 45° es la respuesta, para esto se definirá un paralelogramo en el plano cartesiano con las coordenadas $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$ y $(2,2)$, entonces los puntos medios de cada lado son $(1,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$ y $(1,1)$, luego las rectas que forman el segundo paralelogramo son $x=1$, $x=3$, $y=-x+4$, $y=-x+2$, luego los 4 puntos de intersección que forman el segundo paralelogramo son $(1,1)$, $(3,-1)$, $(3,1)$ y $(1,3)$.



Es fácil ver que este nuevo paralelogramo es congruente al paralelogramo original, ya que se puede convertir el segundo paralelogramo en el original por medio de una rotación de 90° con centro en $(1,1)$ y luego una traslación con vector $\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ por lo que sus áreas son iguales entre sí, con lo cual la respuesta correcta es B.

Solución del problema 24: Veamos que el 7 y 11 son primanos debido a la sucesión $3,7,11$. El 41 y 131 son primanos debido a la sucesión $41,71,101,131$. El 31 y 43 son primanos debido a la sucesión $31,37,43$. El 23 y 41 son primanos debido a la sucesión $23,41,59$. Por lo que los números que no son primanos son 13 y 53 con lo cuál la respuesta correcta es B.

Solución del problema 25: Primero veamos que se necesitan distribuir 8 números pares y 8 números impares, pero para que se obtengan todas las sumas impares es necesario que hayan cantidades impares de impares en cada fila y en cada columna, entonces cada fila y cada columna debe tener exactamente 1 o 3 impares, pero si se analizan las 4 filas entonces deberían completar los 8 impares entre ellas, con lo que deben haber 2 filas con exactamente 3 impares y las otras 2 filas con 1 solo impar, análogamente ocurre con las columnas.

Ahora se procederá a determinar la cantidad de formas distintas de elegir la distribución de los 2 tipos de filas, como son 4 filas y hay que elegir las 2 filas que tendrán exactamente 3 impares, entonces esta elección se puede hacer en $\binom{4}{2}$ formas distintas y las otras dos filas que no fueron elegidas automáticamente tendrán exactamente 1 impar cada una. Análogamente se analiza la cantidad de formas distintas de elegir la distribución de los 2 tipos de columnas, con lo que se obtiene $\binom{4}{2}$ y así se tiene $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 36$ formas de distribuir los tipos de filas y de columnas.

Ahora se procederá a analizar la forma en la que se definen los tipos de números dentro del tablero a partir de la distribución de las filas y de las columnas, para esto sin perder generalidad se analizará la siguiente distribución de tipos de filas y columnas, en la que además se han marcado las casillas que pertenecen a una fila y una columna que debe tener exactamente 1 impar.

	3	1	3	1
1				
1				
3				
3				

En el caso que exista un número impar en una de las 4 casillas marcadas entonces se obtendrá un tablero que no cumple con las condiciones del problema ya que el resto de la fila y de la columna a la que pertenece serán números pares, pero luego habrán dos columnas que deben tener 3 impares y ya tendrán 1 par por lo que el resto de números de ellas serán impares pero luego habrá una fila que debe tener exactamente 1 impar con 2 impares y ya contradice el tipo de fila, se lo puede ver en la siguiente figura.

	3	1	3	1
1	P	I	P	P
1	I	P	I	
3	I	P	I	
3	I	P	I	

Entonces no debe ocurrir este caso, con lo que las 4 casillas marcadas deber tener solo números pares, pero entonces en la fila superior se debe colocar un número impar entre las dos casillas que quedan, esto se puede hacer de 2 maneras distintas, luego ya se puede completar automáticamente una de las columnas que debe tener 3 impares ya que cuenta con un par, y además se puede completar la segunda fila que tiene 1 solo impar, y posterior a esto se puede completar una columna que ya tiene 1 impar y 1 par pero que debe tener exactamente 3 impares, un ejemplo de cómo estaría el tablero es el siguiente

	3	1	3	1
1	I	P	P	P
1	P	P	I	P
3	I		I	
3	I		I	

Pero veamos que para completar una de las columnas faltantes se tiene 2 formas de hacerlo y luego automáticamente se completan las casillas faltantes, por ejemplo

	3	1	3	1
1	I	P	P	P
1	P	P	I	P
3	I	I	I	P
3	I	P	I	I

Finalmente se ordenan los 8 números pares (8!) y los 8 impares (8!) que se puede hacer de $8! \cdot 8! = (8!)^2$ formas distintas. Así se tiene un total de $36 \cdot 2 \cdot 2(8!)^2 = 144 \cdot (8!)^2$ formas distintas de hacer lo indicado, con lo cual la respuesta correcta es A.

2.1.4 NIVEL U

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	A	6	D	11	B	16	E	21	E
2	C	7	D	12	E	17	A	22	C
3	C	8	B	13	C	18	C	23	C
4	C	9	B	14	E	19	A	24	A
5	E	10	D	15	C	20	D	25	B

Solución del problema 1: Una matriz es singular si y sólo si el determinante es nulo. El determinante de esta matriz es

$$8+x+x-2x^2-2-2=-2x^2+2x+4=-2(x^2-x-2)=-2(x-2)(x+1)$$

y se anula cuando $x=2$ o cuando $x=-1$, por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 2: La mediatriz del lado AB es vertical y pasa por el punto medio de este segmento, luego la ecuación es $x=1$. La recta AC tiene pendiente $\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$, luego la mediatriz del segmento AC tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $(2,3)$. La ecuación de la mediatriz a este segmento es $y=\frac{2x}{3}+b$, de donde $b=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.
El circuncentro es la intersección de las 3 mediatrices, por ende su abscisa es 1 y su ordenada es $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$. Se concluye que el circuncentro tiene coordenadas $\left(1,\frac{7}{3}\right)$, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 3: Se tiene que $f(x)=\frac{1}{x^2}+x$, luego $f'(x)=-\frac{2}{x^3}+1$ y $f"(x)=\frac{6}{x^4}>0$. Por ende la función es estrictamente convexa en el intervalo dado, y la única condición para el mínimo es que la primera derivada sea nula. Luego:

$$0=f'(x^*)=-\frac{2}{x^{*3}}+1 \quad\Longrightarrow\quad x^*=\sqrt[3]{2}$$

El mínimo es igual a $f(x^*)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 4: Denotemos $m=\min(x,y)$ y $M=\min(x,y)$. Tenemos que:

$$P(x^\circ=25^\circ \quad o \quad y^\circ=25^\circ)=P(x^\circ=25^\circ)+P(y^\circ=25^\circ)-P(x^\circ=25^\circ \quad y \quad y^\circ=25^\circ)$$

$$P(m^\circ=25^\circ \quad o \quad M^\circ=25^\circ)=P(m^\circ=25^\circ)+P(M^\circ=25^\circ)-P(m^\circ=25^\circ \quad y \quad M^\circ=25^\circ)$$

Pero si $x=y=25$, entonces $m=M=25$, y si $x=25$ o $y=25$, entonces $m=25$ o $M=25$ ya que $\{x,y\}=\{m,M\}$.
Luego se tiene que $P(x^\circ=25^\circ \quad o \quad y^\circ=25^\circ)=P(m^\circ=25^\circ \quad o \quad M^\circ=25^\circ)$ y $P(x^\circ=25^\circ \quad y \quad y^\circ=25^\circ)=P(m^\circ=25^\circ \quad y \quad M^\circ=25^\circ)$. Por ende se concluye que:

$$P(m^\circ=25^\circ)=P(x^\circ=25^\circ)+P(y^\circ=25^\circ)-P(M^\circ=25^\circ)=0.25+0.5-0.2=0.55$$

Por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 5: Consideremos dos puntos $P\in r_2, Q\in r_3$, luego para reales a,b, se tiene que $P=(1,a,1)$ y $Q=(2,1,b)$. La recta PQ tiene la parametrización $(1,1-a,b-1)t+(1,a,1)=(t+1,t-at+a,tb-t+1)$. Para que la recta PQ corte a r_1 es necesario que las dos últimas coordenadas sean zero para un cierto t, es decir $t-ta+a=tb-t+1=0$. Se concluye que $t=\frac{a}{a-1}=\frac{1}{1-b}$. Por tanto:

$$1-\frac{1}{a}=1-b \quad\Longrightarrow\quad b=\frac{1}{a}$$

Luego para todo $a\neq 0$, existen b y t tales que el punto $(t+1,t-at+a,tb-t+1)=(c,0,0)\in r_1$. Por ende infinitas rectas intersecan a las 3 rectas simultáneamente, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 6: Sea m, n enteros. Si $m \leq x < m+1$ y $n \leq y < n+1$, entonces $\lfloor x \rfloor = m$ y $\lfloor y \rfloor = n$, luego se tiene que

$$\int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) dx\, dy = \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+n) dx\, dy = m+n$$

Como el área A se puede discretizar en cuadrados unitarios y usando la propiedad lineal de las integrales se tiene que:

$$\iint_A (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) dA = \sum_{m=0}^{3} \sum_{n=0}^{5} (m+n) = \sum_{m=0}^{3} (6m+15) = 6(6) + 60 = 96$$

Por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 7: Definamos A_i el conjunto de números entre 1 y 1000 inclusive divisibles para i. Luego la cantidad de números divisibles para 2, 3 o 5, se obtiene usando PIE:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}|$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$$

Por ende la probabilidad buscada es igual $\frac{734}{1000} = 0.734$, por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 8: Toda secuencia posee una subsecuencia monótona. Si la secuencia tiene infinitos puntos cumbre, se elige la subsecuencia no creciente formada por éstos. Si la secuencia tiene finitos puntos cumbres, más allá de ellos se puede elegir una subsucesión no decreciente.
Por ende esta subsecuencia es mónotona y acotada, por ende converge.
La secuencia $\frac{(-1)^n}{2}$ cumple las condiciones pero no converge. La secuencia $a_n = (-1)^n$ para $n \leq 2016$ y $a_n = \frac{1}{n}$ para $n > 2016$ converge a pesar de ser monótona sólo para $n > 2016$, por lo que la respuesta es B.

Solución del problema 9: Tenemos que:

$$I = \int_{16}^{20} (1 + (t-18)e^{2-|t-18|}) dt = \int_{16}^{20} dt + \int_{16}^{20} (t-18)e^{2-|t-18|}) dt = 4 + \int_{-2}^{2} se^{2-|s|}) ds$$

Si $f(s) = se^{2-|s|}$, luego $f(-s) = -se^{2-|-s|} = -f(s)$, por tanto f es impar. Luego:

$$I = 4 + \int_0^2 f(s) ds + \int_{-2}^{0} f(s) ds = 4 + \int_0^2 f(s) ds - \int_2^0 f(-t) dt$$

$$I = 4 + \int_0^2 f(s) ds + \int_0^2 f(-t) dt = 4 + \int_0^2 f(s) ds - \int_0^2 f(t) dt = 4$$

Por lo que la respuesta es B.

Solución del problema 10: La ecuación característica de A es $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$, luego $A^3 - 6A^2 = 6I - 11A$, por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 11: Suponiendo que existe el polinomio R, de la igualdad se tiene $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$ que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a_1x + a_2y + a_3z)(b_1x + b_2y + b_3z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_1b_1x^2 + a_2b_2y^2 + a_3b_3z^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)xy + (a_2b_3 + b_2a_3)yz + (a_3b_1 + b_3a_1)zx$$

Luego se concluye que:

$$a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = 1$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = a_2b_3 + b_2a_3 = a_3b_1 + b_3a_1 = 0$$

Luego se tiene que:

$$a_1a_2a_3b_1b_2b_3 = (a_1b_1)(a_2b_2)(a_3b_3) = 1$$

$$a_1a_2a_3b_1b_2b_3 = (a_1b_2)(a_2b_3)(a_3b_1) = (-a_2b_1)(-a_3b_2)(-a_1b_3) = -a_1a_2a_3b_1b_2b_3$$

$$\implies \quad a_1a_2a_3b_1b_2b_3 = 0$$

Pero un número no puede ser igual a 1 y a 0 al mismo tiempo, por ende no existe el polinomio R, por lo que la respuesta es B.

Solución del problema 12: La segunda y tercera columna de la matriz dada son linealmente independientes (de hecho son la base canónica para $\mathbb{R}^2$), por ende el rango de la matriz es mayor o igual a 2. Como la matriz es de 4×2, el máximo valor para su rango es 2. Se concluye que la matriz tiene rango 2 y es de rango completo. Luego existen infinitos x que cumplen la ecuación, de hecho es igual al espacio nulo de la matriz que tiene dimensión 2 más un vector constante, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 13: Vamos a demostrar por inducción que la suma parcial es igual

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \qquad ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Para $n = 1$, es fácil ver que $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{2!-1}{2!}$. Ahora supongamos que se cumple para un entero positivo n, luego $S_n = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$, por ende

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{((n+1)!-1)(n+2)+n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}$$

Con lo cual se concluye la inducción. Por ende:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1$$

Por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 14: La constante $a \neq 0$ no es importante porque si $P(x) = 0$ entonces $Q(x) = P(x)/a = 0$. $Q(x) = (x-16)^2 f(x)$, entonces $Q'(x) = 2(x-16)f(x)+(x-16)^2 f'(x)$, luego $Q'(16) = 0$, entonces 16 es una raíz de Q'. El teorema de Rolle establece que si $f(a) = f(b) = 0$ y f es continua diferenciable, entonces existe un real $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$. Consecuentemente, $Q'(x)$ tiene una raíz real entre 1 y 2, una raíz real entre 2 y 4, una raíz real entre 4 y 8, y una raíz real entre 8 y 16. Pero Q' tiene a lo sumo 5 raíces reales pues tiene grado 5, entonces lo anterior muestra que Q' tiene exactamente 5 raíces reales distintas. Usando nuevamente el teorema de Rolle, se tiene que Q" tiene 4 raíces reales distintas, entre las 5 raíces de Q', por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 15: Primero veamos que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. La ecuación dada implica que:

$$xy - 2016(x+y) = 0 \quad \implies \quad xy - 2016(x+y) + 2016^2 = 2016^2$$

$$\implies \quad (x-2016)(y-2016) = 2016^2$$

Luego $x - 2016$ y $y - 2016$ tienen el mismo signo. Si $0 < x < 2016$ y $0 < y < 2016$, luego

$$2016^2 = (2016-x)(2016-y) < 2016(2016) = 2016^2$$

Por ende sólo el caso $x \geq 2016$ y $y \geq 2016$ es posible. Es decir que el número de soluciones es igual al número de soluciones de $ab = 2016^2$ para enteros positivos a, b, que es igual al número de divisores de $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Se concluye que el número de soluciones es igual a $11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 16: Se tiene que la resta entre dos elementos cualesquiera de P_{16}, P_{625} es igual a

$$\frac{i}{16} - \frac{j}{625} = \frac{625i - 16j}{10000} \implies d\left(P_{16}, P_{625}\right) = \frac{1}{10000} \min\left\{|625i - 16j| \ : \ 1 \leq i \leq 15, 1 \leq j \leq 624\right\}$$

Si $625i - 16j = 0$, entonces $625i = 16j$. Como 16 y 625 son coprimos, entonces lo anterior implica que 16 divide a i, lo cual es imposible para $1 \leq i \leq 15$. Por ende, $|625i - 16j| \geq 1$ y $d(P_{16}, P_{625}) \geq \frac{1}{10000}$. Como 16 y 625 son coprimos, el teorema de Bezout asegura que existen enteros a, b tales que $625a - 16b = 1$. Para este caso es fácil ver que $i = 1, j = 39$ resulta en $625i - 16j = 1$, luego se concluye que $d(P_{16}, P_{625}) = \frac{1}{10000}$, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 17: Se tiene que:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n+1-1)(n^2+3n+1+1)$$

$$\implies \quad n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

Luego $(n^2+3n+1)^2 - 1 = m^2$, es decir que ambos cuadrados son números consecutivos y ello sólo es posible si $n^2+3n+1 = 1$. Pero $n^2+3n+1 > 1$, luego se concluye que la ecuación no tiene soluciones en enteros positivos, por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 18: Sean x, y los números elegidos. Sin pérdida de generalidad asumamos que $x \leq y$. Luego las longitudes de los 3 intervalos son $x, y - x, 1 - y$. Se puede formar un triángulo si y sólo si se cumple con la desigualdad triangular. Por ende:

$$y = x + y - x > 1 - y \therefore y > \frac{1}{2}$$

$$1 - x = y - x + 1 - y > x \therefore x < \frac{1}{2}$$

$$1 - y + x > y - x \therefore y < x + \frac{1}{2}$$

La solución a estas 3 desigualdades es un área triangular cuyos vértices son $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y el área de este triángulo es $\frac{1}{8}$. Por simetría, el caso $x \geq y$, se tiene una solución independiente con un triángulo de área también igual a $\frac{1}{8}$. Luego el área del espacio solución es $\frac{1}{4}$. Como el área total es 1, la probabilidad buscada es $\frac{1}{4}$, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 19: Se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = Q\Lambda Q^T$$

Es fácil comprobar que $QQ^T = I$ e inductivamente se muestra que $A^n = Q\Lambda^n Q^T$. Por tanto:

$$A^{16} = Q\Lambda^{16}Q^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 5^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 20: Si $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2016n + i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2016n + i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2016 + \frac{i}{n}}$, es fácil ver que S_n es una suma de Riemann para la función $f(x) = \frac{1}{2016+x}$ en el intervalo $[0, 1]$. Como f es continua, el límite existe y es igual a:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{2016 + x} dx = \ln(2016 + x)_0^1 = \ln 2017 - \ln 2016 = \ln\left(\frac{2017}{2016}\right)$$

Por lo que la respuesta es D.

Solución del problema 21: Definimos el lagrangiano $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^4 + y^4 - \lambda(x + 4y - 9)$. Luego:

$$\nabla\mathcal{L} = \begin{bmatrix}8x^3 - \lambda & 4y^3 - 4\lambda & x + 4y - 9\end{bmatrix}$$

Para un punto crítico, el gradiente anterior debe anularse, por ende $x^* = \frac{a}{2}$ y $y^* = a$ con $a = \sqrt[3]{\lambda}$. Luego $\frac{a}{2} + 4a = 9$, entonces $a = 2$. Por tanto $x^* = 1, y^* = 2$ y $f(x^*, y^*) = 18$.
El Hessiano de f es:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix}24x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2\end{bmatrix}$$

que obviamente es una matriz positiva definida para puntos distintos al origen. Luego el punto anterior es efectivamente el mínimo sobre la recta, por lo que la respuesta es E.

Solución del problema 22: Sea $x_n = 1^{2016} + 2^{2016} + \ldots + n^{2016}$ y $y_n = n^{2017}$, ambas son no acotadas y crecientes, luego el teorema de Cesaro-Stolz nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ si el segundo límite existe.
Por simplicidad consideremos

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2017} - n^{2017}}{(n+1)^{2016}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2017}}{\frac{1}{n+1}}$$

Sea $f(x) = (1-x)^{2017}$, luego $f'(0) = -2017$ y

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0) - f(h)}{-h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1 - (1-h)^{2017}}{h}$$

Como $\frac{1}{n+1}$ converge a 0, entonces el límite L existe y es igual $L = 2017$. Por ende el límite inicial existe y es igual a $\frac{1}{2017}$, por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 23: Notemos que $(xy)' = y + xy'$ y $(xy)" = (y + xy')' = y' + y' + xy"$. Luego $0 = xy" + 2y' + xy = (xy)" + xy$. Sabemos que la ecuación diferencial $z" + z = 0$ tiene soluciones $z = A\cos(x) + B\sin(x)$, por tanto $y(x) = \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{x}$.
Además, $0 = y(\pi) = \frac{A\cos(\pi)+B\sin(\pi)}{\pi} = \frac{-A}{\pi}$, luego $A = 0$ e $y(x) = \frac{B\sin(x)}{x}$. Adicionalmente, $1 = y(1) = \frac{B\sin(1)}{1}$ y por ende $B = \frac{1}{\sin(1)}$. Finalmente, se tiene que la función no es continua en 0 pero

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\sin(1)} = \frac{1}{\sin(1)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{\sin(1)}$$

Por lo que la respuesta es C.

Solución del problema 24: Considerar el grupo cuyos elementos son $G = \{0, 1, 2, 3\}$ y operación suma módulo 4. $A = \{0, 1, 3\}$ cumple la condición dada pero no es grupo pues no cumple que es cerrado $(1 \times 1 = 2 \notin A)$ bajo la misma operación. Luego I es falso.
Sea $g \in G$ y consideremos el conjunto $B = \{ga^{-1} : a \in A\}$. Luego A y B tienen la misma cantidad de elementos, luego la suma de sus cardinales es mayor que el cardinal de G, por ende existe un elemento $h \in A \cap B$, luego $h = ga^{-1}$ para un $a \in A$, luego $g = ah$, ambos factores pertenecen a A. Luego II es verdadero, por lo que la respuesta es A.

Solución del problema 25: Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2016}}$, es decir la 2016-esima raíz de la unidad.
Sea $v^{(j)} = [1, \omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^{2015j}]^T$ para $j = 0, 1, \ldots, 2015$. Luego:

$$Av^{(j)} = \begin{bmatrix}\omega^j & \omega^{2j} & \ldots & \omega^{2015j} & \omega^{2016j}\end{bmatrix} = \omega^j v^{(j)}$$

$$A^T v^{(j)} = \begin{bmatrix}\omega^{-j} & \omega^0 & \ldots & \omega^{2013j} & \omega^{2014j}\end{bmatrix} = \omega^{-j} v^{(j)}$$

Se concluye que $(4A + 2A^T) = (4\omega^j + 2\omega^{-j})v^j$, es decir $4\omega^j + 2\omega^{-j}$ son los eigenvalores de la matriz requerida con $j = 0, 1, \ldots, 2015$, por lo que la respuesta es B.

2.2 SEGUNDA FASE

2.2.1 NIVEL 1

Solución del problema 1: Veamos que la tercera parte de 201 es $201 \div 3 = 67$ entonces en total hay $67 \cdot 1 + 67 \cdot 5 + 67 \cdot 10 = 67 + 335 + 670 = \boxed{1072}$ dólares que tiene Adrián.

Solución del problema 2: Antes de duplicarlo por última vez tuvo que haber sido la respuesta $672 \div 2 = 336$, antes de duplicarlo por tercera vez tuvo que haber sido la respuesta $336 \div 2 = 168$, antes de duplicarlo por segunda vez tuvo que haber sido la respuesta $168 \div 2 = 84$, finalmente, antes de duplicarlo por primera vez el número tuvo que haber sido $84 \div 2 = \boxed{42}$

Solución del problema 3: La suma de los números originalmente era $1 + 2 + 3 + ... + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$, si el caracol que fue al restaurante tenía el número x entonces $120 - x$ termina en 0, por lo que 10 $120 - x$ es múltiplo de 10, pero como 120 es múltiplo de 10 entonces x también debe serlo, por lo que se puede concluir que $x = 10$ y así se determina que el caracol que fue al restaurante tenía el número $\boxed{10}$

Solución del problema 4: Como el cuadrado B tiene lado 3 y el cuadrado C tiene lado 2 entonces el cuadrado D tiene lado 1 con lo cual el cuadrado A tiene lado $2 + 2 + 1 = 5$ entonces su área es igual a $5^2 = 25$ es decir que ingresan 25 cuadrados unitarios, pero el cuadrado D es unitario por lo que en total ingresan $\boxed{25}$ cuadrados del tipo D en el cuadrado A.

Solución del problema 5: Veamos que $M \leq 50$ y $N \leq 100$ entonces $M + N \leq 50 + 100$ por lo que $M + N \leq 150$, y como $N \geq 50$ entonces $\frac{M+N}{N} \leq \frac{150}{50} = \boxed{3}$

Solución del problema 6: Como se tiene un total de 365 días en un año y $365 = 7 \cdot 52 + 1$ entonces cada año que pasa la fecha de hoy se moverá un día en la semana, y como hay 7 días que deben pasar para repetir el día entonces deberán pasar $\boxed{7}$ años.

Solución del problema 7: Primero se tiene que $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ entonces para que $\frac{3150}{x}$ sea un cuadrado perfecto se debe tener que x divida a 3150 y además debe ser un valor que elimine aquellos factores de 3150 que aparecen una cantidad impar de veces, con lo que $x = 2 \cdot 7 \cdot k$, donde $k \in \{1, 3^2, 5^2, 3^2 \cdot 5^2\}$, y así se puede concluir que la cantidad de enteros x que cumplen el problema es $\boxed{4}$

Solución del problema 8: Veamos que los 8 triángulos que se encuentran alrededor del cuadrado pequeño son iguales, y como esta área es $16 - 4 = 12$ entonces cada triángulo tiene área $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.
Ahora veamos que el cuadrado intermedio está formado por el cuadrado pequeño y 4 triángulos de los anteriores entonces el área del cuadrado intermedio es $\frac{3}{2} \cdot 4 + 4 = \boxed{10}$

Solución del problema 9: El menor número compuesto es 4, luego, la suma de dos números compuestos es por lo menos 8. Es ese motivo que los números primos que cumplan dicha propiedad deben ser mayores o iguales a 8. El menor primo que es mayor o igual que 8 es 11, sin embargo, tenemos que todas las formas de descomponer 11 como suma de dos números son $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ y en ninguna de esas formas hay dos números compuestos, en consecuencia, 11 no cumple la propiedad.

Analicemos el siguiente primo que es 13 y en este caso notemos que $13 = 4 + 9$ sí se puede expresar como suma de dos números compuestos. Concluimos que $\boxed{13}$ es el menor primo que se puede expresar como la suma de dos números compuestos.

Solución del problema 10: Veamos que

$$E = \frac{(-1)^{n-1}\left((-1)^4 - (-1)^3\right)}{(-1)^{n-1}} = (-1)^4 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 2$$

Por lo que la expresión E puede tomar $\boxed{1}$ valor.

Solución del problema 11: Primero analicemos los números que tienen exactamente 4 divisores y dos son primos, dichos números tienen la forma $N = pq$, donde p, q son primos, y es claro que los divisores de N son $1, p, q, pq$, por lo que lo único que se debe calcular es cuántas parejas de números primos (p, q) se pueden elegir del conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ para poder formar el producto $N = pq$, como en total son 7 números posibles y se necesitan elegir 2 entonces la cantidad de formas de hacer dicha elección es $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, por lo que la respuesta es $\boxed{21}$ enteros positivos cumplen.

Solución del problema 12: Hay 7 saludos por persona y un total de 24 personas entonces se podría decir que la cantidad de saludos es $7 \times 24 = 168$, ahora veamos que un saludo es mutuo, es decir, si A saluda a B significa que B también saludó a A, por lo que hay que dividir 168 para 2, para eliminar las repeticiones del conteo, dando así $168 \div 2 = \boxed{84}$

Solución del problema 13: Primero vamos a contar cuántos números hay hasta la fila 15

$$1 + 2 + 3 + ... + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$

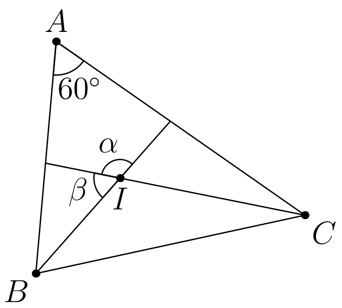
Por lo que el último número de la fila 15 es $120 \cdot 2 = 240$.
Ahora veamos cuántos números hay hasta la fila 14

$$1 + 2 + ... + 14 = (1 + 2 + .. + 15) - 15 = 120 - 15 = 105$$

Por lo que el último número de la fila 14 es $105 \cdot 2 = 210$, entonces el primer número de la fila 15 es $210 + 2 = 212$, de esta manera la suma pedida es

$$\begin{aligned} 212 + 214 + ... + 240 &= (210 + 2) + (210 + 4) + ... + (210 + 30) \\ &= 210 \cdot 15 + (2 + 4 + ... + 30) \\ &= 3150 + (2 + 4 + ... + 30) \\ &= 3150 + 2(1 + 2 + ... + 15) \\ &= 3150 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} \\ &= \boxed{3390} \end{aligned}$$

Solución del problema 14:



Primero veamos que

$$\begin{aligned} \alpha = \angle BIC &= 180^\circ - \angle BCI - \angle CBI \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA - \frac{1}{2}\angle CBA \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle CBA) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 120^\circ \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

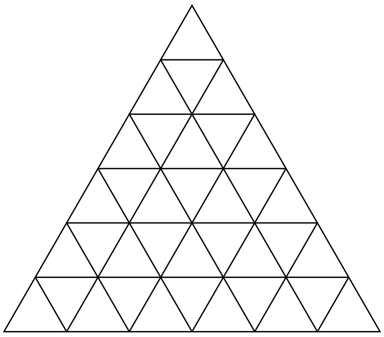
Entonces $\beta = 60^\circ$ con lo que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{120^\circ}{60^\circ} = \boxed{2}$

Solución del problema 15: Consideremos primero las 5 rectas. Para maximizar el número de intersecciones entre éstas, no pueden haber rectas paralelas ni mas de 2 rectas que se intersecten en un mismo punto. Si esto ocurre, cada par de rectas se intersectará exactamente una vez. Por lo tanto, el número de intersecciones sera $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Ahora, cada circunferencia puede cortar a una recta a lo mucho 2 veces. Ya que hay 5 rectas y 2 circunferencias, el mayor número de intersecciones entre rectas y circunferencias es $5 \cdot 2 = 10$. Por último, las circunferencias se intersectan como mucho 2 veces entre sí. Por lo tanto, el mayor número de intersecciones en estas siete figuras es $10 + 10 + 2 = \boxed{22}$

2.2.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: Veamos que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, por lo que los únicos primos que son divisores del 2016 son 2, 3 y 7, de donde la respuesta es $2 + 3 + 7 = \boxed{12}$

Solución del problema 2: Es fácil ver que el triángulo queda dividido de la siguiente manera



Por lo que el total de triángulos pequeños es $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \boxed{36}$

Solución del problema 3: Veamos que se generan ciclos de 4 dígitos y cada ciclo termina con el dígito 6, como $2016 = 4 \cdot 504$ entonces hasta llegar a la posición 2016 se han repetido 504 veces el ciclo 2016 de esta manera el dígito de la posición 2016 es $\boxed{6}$

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 6 del nivel 1.

Solución del problema 5: Como se desea obtener un múltiplo de 105 entonces el número debe ser múltiplo de 3, de 5 y de 7.
Para que el número sea múltiplo de 5 se debe tener el último dígito igual a 0 o a 5 entonces no se debe borrar el 0.
Para que el número sea múltiplo de 3 se debe tener la suma de los dígitos del número múltiplo de 3, y como inicialmente el número con todos los dígitos tiene suma de sus dígitos igual a $4 + 3 + 6 + 2 + 0 = 15$ que es múltiplo de 3 entonces se debe borrar solo un dígito que sea múltiplo de 3, es decir el 3 o el 6. Si borramos el 3 entonces el número sería 4620 y dicho número es fácil de comprobar que es múltiplo de 7 también, en cambio si borramos el 6 entonces el número sería 4320 que es muy fácil comprobar que dicho número no es múltiplo de 7, por lo que la única respuesta es que se debe borrar el dígito $\boxed{3}$

Solución del problema 6: Véase la solución del problema 9 del nivel 1.

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 10 del nivel 1.

Solución del problema 8: Véase la solución del problema 11 del nivel 1.

Solución del problema 9: Veamos que

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{29}$$

Además

$$\frac{a}{c} = \frac{21}{203} = \frac{3}{29} \implies \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$$

Luego $b = c$ y así se obtiene que $b - c = \boxed{0}$

Solución del problema 10: Véase la solución del problema 12 del nivel 1.

Solución del problema 11: Véase la solución del problema 13 del nivel 1.

Solución del problema 12: Véase la solución del problema 15 del nivel 1.

Solución del problema 13: Lo que nos pide el problema es determinar $x \in \{0, 1, ..., 6\}$ tal que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2016^3 \equiv x (\text{mod} 7)$$

Notemos que la suma de 7 cubos perfectos consecutivos es múltiplo de 7, para esto basta con analizar la suma $1^3 + 2^3 + ... + 7^3$ en módulo 7.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + 7^3 &\equiv 1^3 + 2^3 + ... + 6^3 \\ &\equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 \\ &\equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 - 3^3 - 2^3 - 1^3 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Por lo que se concluye la demostración.
Como se pide el residuo con la suma de los primeros 2016 cubos perfectos y $2016 = 7 \cdot 288$ entonces se forman 288 grupos que suman un mútiplo de 7 y de esta manera se puede concluir que $x = 0$, es decir que su residuo es $\boxed{0}$

Solución del problema 14: En primer lugar, es claro que ningún número de un dígito cumple que es igual al triple del producto de sus dígitos. Lo mismo sucede con los números $100, 101, 102, \ldots, 110$ pues el producto de los dígitos de cada uno es 0. Nos queda analizar a los números de dos dígitos.
Sea $\bar{ab}$ un número de dos dígitos tal que $\bar{ab} = 3ab$, entonces:

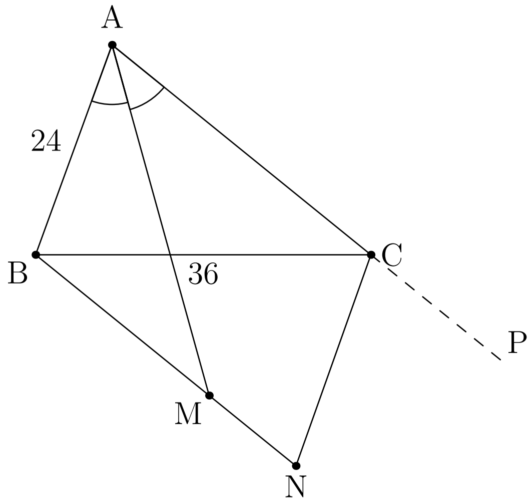
$$\begin{aligned} \bar{ab} &= 3ab \\ 10a + b &= 3ab \\ 10a &= b(3a - 1) \end{aligned}$$

multiplicamos a ambos lados por 3, y agrupamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 10(3a - 1) + 10 &= 3b(3a - 1) \\ 10 &= (3b - 10)(3a - 1) \end{aligned}$$

Notamos que $(3a - 1)$ es un divisor positivo de 10, ésto ocurre solamente cuando $a = 1$ o $a = 2$. Si $a = 1$, entonces $b = 5$, y se genera el número 15. Si $a = 2$ entonces $b = 4$ y se genera el número 24. Por lo tanto, los únicos números de dos dígitos que son iguales al triple del producto de sus dígitos son el 15 y 24.
Concluimos que, de los 110 números, se borran 2 y quedan $\boxed{108}$ números en la pizarra.

Solución del problema 15:



Por ser AM bisectriz interna, $\angle MAC = \angle BAM$, (escogemos cualquier punto P perteneciente al rayo AC mas cercano a C que de A)análogamente como CN es bisectriz externa, $\angle NACN$, por otro lado como AC es paralela a BN, tenemos que $\angle MAC = \angle AMB$ y $\angle NCP = \angle CNB$ de lo que podemos concluir que el triángulo ABM y BCN son isósceles con $AB = BM = 24$ y $BC = BN = 36$, de donde tenemos que $MN = BN - BM = 36 - 24 = \boxed{12}$

2.2.3 NIVEL 3

Solución del problema 1: Los números deben iniciar con el dígito 1 y luego con un dígito que puede ser 5, 6, 7, 8.
Fácilmente podemos ver que los números *crecientes* de 4 cifras que inician con:

- 15 son: $1567, 1568, 1569, 1578, 1579, 1589$.
- 16 son: $1678, 1679, 1689$.
- 17 son: 1789.
- 18 no existen.

Por lo que en total hay $1 + 3 + 6 = \boxed{10}$ números.

Solución del problema 2: Véase la solución del problema 5 del nivel 2.

Solución del problema 3: Sea x el número de niños, entonces hay un total de $x + 10$ niñas.
El día que faltaron hubieron $x - 2$ niños y $x + 10 - 3$ niñas por lo que

$$\begin{aligned} x - 2 + x + 10 - 3 &= 31 \\ 2x + 5 &= 31 \\ 2x &= 26 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Entonces asistieron en total $x - 2 = 13 - 2 = \boxed{11}$ niños.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 9 del nivel 1.

Solución del problema 5: Es evidente que x debe ser positivo y mayor a 1. Ahora, manipulando

$$\begin{aligned} & \frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{x^3+1}{x^2-1} - x = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{x^3+1-x(x^2-1)}{x^2-1} = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{x^3+1-x^3+x}{x^2-1} = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{x+1}{x^2-1} = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{1}{x-1} = \sqrt{\frac{6}{x}} \\ \iff & \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{6}{x} \\ \iff & x = 6(x-1)^2 \\ \iff & x = 6x^2 - 12x + 6 \\ \iff & 0 = 6x^2 - 13x + 6 \\ \iff & 0 = (3x-2)(2x-3) \end{aligned}$$

Por lo que $x = \frac{3}{2}$, entonces hay $\boxed{1}$ valor real x que cumple la ecuación.

Solución del problema 6: Si $x = 0 \Rightarrow f(2) = f(0) + 0 + 1 \Rightarrow f(2) = 3 + 1 = 4$.
Si $x = -2 \Rightarrow f(0) = f(-2) + (-2) + 1 \Rightarrow 3 = f(-2) - 1 \Rightarrow f(-2) = 4$.
Entonces $f(2) + f(-2) = 4 + 4 = \boxed{8}$

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 12 del nivel 1.

Solución del problema 8: Veamos que

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 2^3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 24$$

Por otro lado se tiene

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_9}{9} = 2^9 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_9 = 9 \cdot 512 = 4608$$

Entonces

$$\frac{a_4 + a_5 + ... + a_9}{6} = \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_9) - (a_1 + a_2 + a_3)}{6} = \frac{4608 - 24}{6} = \boxed{764}$$

Solución del problema 9: Véase la solución del problema 13 del nivel 2.

Solución del problema 10: Como $x^2 - mx - 2$ es divisible para $x - 1$ entonces $1^2 - m(1) - 2 = 0$ por lo que $m = -1$.
Como $x^2 - nx + 2$ es divisible para $x + 1$ entonces $(-1)^2 - n(-1) + 2 = 0$ por lo que $n = -3$.
Entonces $m - n = -1 - (-3) = -1 + 3 = \boxed{2}$

Solución del problema 11: Véase la solución del problema 15 del nivel 2.

Solución del problema 12: Sea A y B las cantidades de monedas que tienen Sebastián y Daniel, respectivamente. Sea x la cantidad de monedas necesaria que le debe dar Daniel a Sebastián para que el tenga seis veces la cantidad de monedas que le queden a Daniel, luego, por condición del problema:

$$A + x = 6(B - x),$$

pues Sebastián tendría $(A + x)$ monedas mientras Daniel se quedaría con $(B - x)$ monedas. Análogamente, la otra condición nos lleva a la ecuación:

$$B + x = \frac{1}{3}(A - x).$$

De $x = \frac{6B-A}{7}$ y de $x = \frac{A-3B}{4}$, por lo tanto:

$$\frac{6B - A}{7} = \frac{A - 3B}{4},$$

simplificando esta ecuación obtenemos $45B = 11A$, y como 45 y 11 no tienen ningún factor en común, existe un entero k tal que $A = 45k$ y $B = 11k$, en consecuencia, el mínimo valor que puede tomar A es $\boxed{45}$ que ocurre cuando $k = 1$.

Solución del problema 13: Usaremos el siguiente resultado conocido: Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, entonces:

$$x_1 + x_2 = -m$$
$$x_1 x_2 = n$$

La ecuación $x^2 + ax + b = 0$ tiene raíces r_1 y r_2, entonces:

$$r_1 + r_2 = -a$$
$$r_1 r_2 = b$$

La ecuación $x^2+3x+3c=0$ tiene raíces $\dfrac{r_1}{r_2}$ y $\dfrac{r_2}{r_1}$, entonces

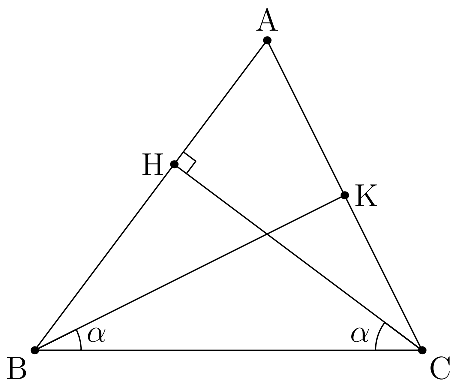
$$\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}=-3$$
$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}=3c$$

De donde es claro que $c=\dfrac{1}{3}$, y en consecuencia, $\dfrac{a^2}{bc}=\dfrac{3a^2}{b}$.
Luego tenemos que:

$$\frac{a^2}{bc}=\frac{3a^2}{b}=3\cdot\frac{(r_1+r_2)^2}{r_1r_2}=3\left(\frac{r_1^2+2r_1r_2+r_2^2}{r_1r_2}\right)=3\left(\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}+2\right)$$

Por ende, concluimos que $\left|\dfrac{a^2}{bc}\right|=\boxed{3}$

Solución del problema 14:



Primero veamos que $\triangle BCH\approx\triangle BCK$ (por l.a.l.), entonces se cumple $\angle BKC=\angle BHC=90°$ pero entonces BK es mediana y altura en ABC con lo que el triángulo es isósceles con $AB=BC$.

Pero además por la congruencia entre los triángulos se tiene $\angle CBH=\angle BCK$ entonces ABC es isósceles con $AB=AC$.

Entonces $AB=AC=BC$ de donde ABC es equilátero y luego $\angle CAB=60°$, así la respuesta es $\boxed{60}$

Solución del problema 15: Supongamos que leemos las vocales de la palabra una a la vez, de izquierda a derecha, contando las veces que cambiamos de 'j' a 'a', y de 'a' a 'j'. Si la primera letra es una 'j' y la ultima letra es una 'j', el numero de veces que cambiamos de 'j' a 'a' debe ser igual al numero de veces que cambiamos de 'a' a 'j'. Lo mismo sucede si la primera y la ultima letra son 'a'. Por otra parte, si la primera letra es una 'j' y la ultima letra es 'a', el numero de veces que cambiamos de 'j' a 'a' es exactamente una unidad mayor al numero de veces que cambiamos de 'a' a 'j'. De la misma forma, si la primera letra es una 'a' y la ultima letra es 'j', el numero de veces que cambiamos de 'j' a 'a' es exactamente una unidad menor que el numero de veces que cambiamos de 'a' a 'j'. Por lo tanto, las palabras que cumplen la propiedad son exactamente esas palabras que empiezan con 'j' y terminan en 'a'. Por lo tanto, el numero de palabras *chistosas* es $2^{10-2}=2^8=\boxed{256}$

2.3 TERCERA FASE

2.3.1 NIVEL 1

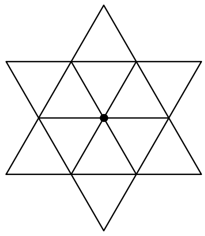
Solución del problema 1: Veamos que N tiene un total de $2016 \div 2 = 1008$ dígitos 0 y la misma cantidad de dígitos 1, entonces la suma de los dígitos de N es $\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1008} + \underbrace{0 + 0 + ... + 0}_{1008} = 1008$

Solución del problema 2: Veamos que el mayor número de monedas que puede usar es cuando usa sólo monedas de 5 centavos, que son los de menor denominación, y en este caso usaría $35 \div 5 = 7$ monedas.

Veamos que el menor número de monedas que puede usar es cuando usa sólo 2 monedas: 1 de 10 y una de 25, esto se debe a que es imposible pagar con una sola moneda ya que no hay una de 35 centavos.

Con lo que el valor pedido es $7 - 2 = 5$ monedas.

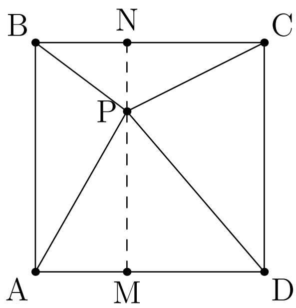
Solución del problema 3:



Dibuja las 3 diagonales del hexágono, como en la figura, para partir la figura en 12 triángulos equiláteros pequeños. Dado que la región en común tiene un área de 60, cada triángulo pequeño tiene un área de 10. Como cada tríangulo original está compuesto de 9 triángulos pequeños, su área es 90.

Solución del problema 4: Se sabe que par + impar = impar, es la única forma que dos enteros sumen un número impar. Como el único primo par es 2 se tiene que $93 = 2 + 91$, pero $91 = 7 \times 13$, asi que no se puede escribir 93 como la suma de dos primos.

Solución del problema 5:
Solución 1:
Denotemos con (XYZ) al área del triángulo XYZ.
Sea a la longitud del lado del cuadrado, trazamos PM y PN, que son las perpendiculares a los lados AD y BC, respectivamente.



Como $(PDA) = 4$, tenemos

$$(PDA) = \frac{AD \cdot PM}{2} = \frac{a \cdot PM}{2} = 4$$

y como $(PBC) = 6$, tenemos

$$(PBC) = \frac{BC \cdot NP}{2} = \frac{a \cdot NP}{2} = 6$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones tenemos

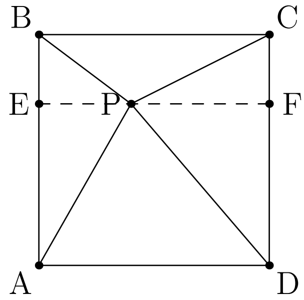
$$\frac{a \cdot (PM + NP)}{2} = 10$$

Pero es claro que $PM + NP = a$, luego

$$\frac{a^2}{2} = 10 \to a = \sqrt{20}$$

con lo cual el lado mide $\sqrt{20}$.

Solución 2:
Denotemos con (XYZ) al área del triángulo XYZ.
Se traza un segmento paralelo a AD que pase por P.



Claramente el cuadrado $ABCD$ ha quedado dividido en 2 rectángulos $AEFD$ y $BCFE$.
Es claro que $8 = 2 \cdot (PDA) = (AEFD)$ así como $12 = 2 \cdot (PBC) = (BCFE)$.
Entonces $(ABCD) = (AEFD) + (BCFE) = 8 + 12 = 20$, con lo cual el lado mide $\sqrt{20}$.

Solución del problema 6: Supongamos que existen p_1, p_2 y p_3 primos con p_1 y p_2 primos consecutivos y $p_1 + p_2 = 2 \cdot p_3$.
Entonces se tiene que $p_3 = \frac{p_1+p_2}{2}$, en otras palabras p_3 es el promedio de p_1 y p_2. Ya que p_1 y p_2 son distintos, el promedio de ellos está estrictamente entre ambos y debe ser primo. Sin embargo, p_1 y p_2 son primos consecutivos y por lo tanto no existe ningún primo entre ellos. Contradicción, por lo tanto no existe p_3 que cumpla.

Solución del problema 7: En cada fila se sombrea al menos una casilla, luego, en todo el tablero se sombrean al menos 4 casillas.

Un ejemplo de tablero que cumpla con las condiciones dadas es el siguiente:

16	1	2	3
4	5	14	6
7	13	8	9
10	11	12	15

2.3.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: Veamos que cada término de la suma es igual a 2 ya que todos los 2015 términos son de la forma $\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$ entonces la suma es igual a $\underbrace{2+2+2+...+2}_{2015} = 2 \cdot 2015 = 4030$ por lo que la respuesta es $4+0+3+0 = 7$.

Solución del problema 2:

Solución 1:

Es fácil ver que la parte con 0 puntos aparece exactamente en 7 fichas, lo mismo ocurre con 1 punto que aparece exactamente en 7 fichas y lo mismo ocurre para todas las demás cantidades de puntos, todos aparecen en exactamente 7 fichas, pero cada cantidad aparece exactamente una vez en cada una de esas 7 fichas, excepto en una que tiene el mismo número repetido, entonces cada número aparecerá 8 veces en la suma que determina el total de puntos, es decir que la suma total es

$$\begin{aligned}\underbrace{1+1+...+1}_{8}+\underbrace{2+2+...+2}_{8}+...+\underbrace{6+6+...+6}_{8} &= 1\cdot 8+2\cdot 8+...+6\cdot 8\\ &= 8(1+2+...+6)\\ &= 8\cdot\frac{6\cdot 7}{2}\\ &= 168\end{aligned}$$

Solución 2:

Vamos a proceder organizando todas las fichas de acuerdo al número que tengan por la derecha, además considerando que no se repitan fichas, de esta manera se tiene la siguiente organización:

- Con el 0 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 0,1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $0+1+2+3+4+5+6+7\cdot 0 = 21$ puntos.
- Con el 1 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $1+2+3+4+5+6+6\cdot 1 = 27$ puntos.
- Con el 2 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $2+3+4+5+6+5\cdot 2 = 30$ puntos.
- Con el 3 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $3+4+5+6+4\cdot 3 = 30$ puntos.
- Con el 4 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $4+5+6+3\cdot 4 = 27$ puntos.
- Con el 5 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 5,6.
  Con estas fichas se tienen $5+6+2\cdot 5 = 21$ puntos.
- Con el 6 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 6.
  Con esta ficha se tienen $6+6 = 12$ puntos.

Por lo que en total se tienen $21+27+30+30+27+21+12 = 168$ puntos.

Solución 3:

Este problema también permite una solución mecánica que consiste en realizar la lista de las 28 fichas, confirmando que no se repita alguna ni que falte alguna, posteriormente a esto se realiza el conteo de los puntos que hay en total y se puede obtener sin inconveniente que hay en total 168 puntos, esta solución difiere con la anterior debido a que en la anterior se considera un orden que permite confirmar que no hayan repeticiones ni que falte alguna ficha.

Solución del problema 3: Como el máximo común divisor de esos dos números es 60, entonces ambos son múltiplos de 60, y en consecuencia su producto es múltiplo de $60\times 60 = 3600$. Los múltiplos de 3600 que tienen cuatro dígitos son 3600 y 7200, luego, podemos concluir que $d = 2$.

Ahora, si suponemos que los números son $60n$ y $60m$, como su producto es 7200, tenemos:

$$60n \times 60m = 7200 \to mn = 2,$$

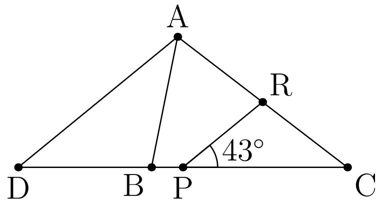
de donde tenemos que $\{m, n\} = \{1, 2\}$. Es decir, los números buscados son 60 y 120. Nos piden la suma de esos números que es 180.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 6 del nivel 1.

Solución del problema 5:

Solución 1:

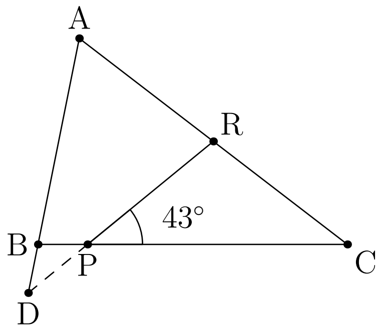
Prolongamos el segmento PB, por el extremo B, hasta el punto D, de tal modo que $BD = BA$.



Según el dato, $AB + BP = PC$, de donde se obtiene que $DP = PC$.
Como R es punto medio de AC y P es punto medio de CD, entonces PR es base media del triángulo ADC, y en consecuencia PR es paralelo a AD y $\angle ADB = \angle RPC = 43°$.
Por otro lado, el triángulo ABD es isósceles con$AB = BD$, entonces $\angle DAB = \angle ADB = 43°$.
Finalmente $\angle ABC = \angle DAB + \angle ADB = 43° + 43° = 86°$.

Solución 2:

Prolongamos el segmento AB, por el extremo B, hasta el punto D, de tal modo que $BD = BP$.



Ahora vamos a demostrar que los puntos D, P, R son colineales usando el Teorema de Menelao que indica que D, P, R son colineales si y sólo si

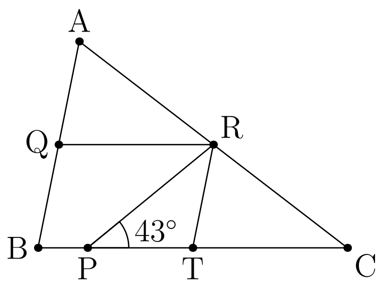
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CR}{AR} = 1$$

Pero como $AD = AB + BD = AB + BP = CP$, $CR = AR$ y $BP = BD$ entonces la expresión anterior sí es 1 ya que todos los factores del miembro izquierdo se cancelan, entonces ya se puede concluir que D, P, R son colineales, con lo que podemos obtener que $43° = \angle CPR = \angle BPD$, y como el triángulo BDP es isósceles por lo que $BD = BP$ entonces $\angle BDP = \angle BPD$, entonces

$$\angle ABC = 180° - \angle DBP = 180° - (180° - \angle BDP - \angle BPD) = \angle BDP + \angle BPD = 43° + 43° = 86°$$

Solución 3:

Sean Q y T los puntos medios de los lados AB y BC.



Se tiene que QR es paralela media en ABC con $QR \parallel BC$, así mismo RT es paralela media en ABC con $RT \parallel AB$, entonces $BQRT$ es un paralelogramo, de donde $BQ = RT$ además $\angle ABC = \angle QRT$, así como también $43° = \angle RPT = \angle PRQ$.
Por otro lado veamos que

$$
\begin{aligned}
&BC = BP + CP \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}CP \\
\Rightarrow &BT = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}CP \\
\Rightarrow &BT = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}(AB + BP) \\
\Rightarrow &BT = BP + \frac{1}{2}AB \\
\Rightarrow &BP + PT = BP + \frac{1}{2}AB \\
\Rightarrow &PT = \frac{1}{2}AB \\
\Rightarrow &PT = BQ \\
\Rightarrow &PT = RT
\end{aligned}
$$

Con lo que el triángulo PRT es isósceles, por lo que $43° = \angle RPT = \angle PRT$, con esto ya se puede decir que $\angle QRT = 43° + 43° = 86°$ por lo que se puede concluir que $\angle ABC = 86°$.

Solución del problema 6: Notemos que las sillas de los extremos deben ser ocupadas por estudiantes. Ésto implica que los profesores tienen 7 posibles sillas para escoger, y no pueden elegir dos adyacentes. Si numeramos 2,...,8 a estas 7 sillas, las posibilidades de sillas ocupadas por los profesores serán: (2,4,6) (2,4,7) (2,4,8) (2,5,7) (2,5,8) (2,6,8) (3,5,7) (3,5,8) (3,6,8) (4,6,8). En estas 10 configuraciones de sillas, los profesores pueden ordenarse de cualquier manera, es decir para cada configuración, hay 6 posibles ordenamientos de profesores. Por el principio de la multiplicación, hay $10(3!) = 60$ maneras en que los profesores se pueden sentar tal que cada profesor se ubique entre dos estudiantes.

Solución del problema 7: En primer lugar, probaremos que no es posible que $n \geq 100$. En efecto, si tuviéramos a 100 o mas números consecutivos, necesariamente alguno debe ser múltiplo de 100, sea $\overline{abc00}$ este número, luego, $\overline{abc00} = \overline{abc} \times 100$ es el producto de dos números de tres dígitos, lo cual no es posible.
Vamos a probar ahora que el mayor valor posible de n es 99. Por lo visto anteriormente, solo faltaría un ejemplo.
Notemos que $100 \times 100 = 10000$ y $100 \times 101 = 10100$ son los menores números que se pueden expresar como el producto de dos números de tres dígitos. Luego, ninguno de los siguientes 99 números se puede expresar como el producto de dos números de 3 dígitos $10001, 10002, 10003, \ldots, 10097, 10098, 10099$.
Éste es el ejemplo que estábamos buscando.

2.3.3 NIVEL 3

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 2 del nivel 2.

Solución del problema 2: Como a y c son enteros entonces $a^2 + c$ tambien es entero, pero sabemos que $a^2 + \frac{1}{b} + c$ es entero, entonces $\frac{1}{b}$ tambien es enter. Como b es entero positivo y $\frac{1}{b}$ es entero, concluimos que $b = 1$. Luego, tenemos las ecuaciones:

$$a^2 + c = 38$$
$$a^2 - c = 12$$

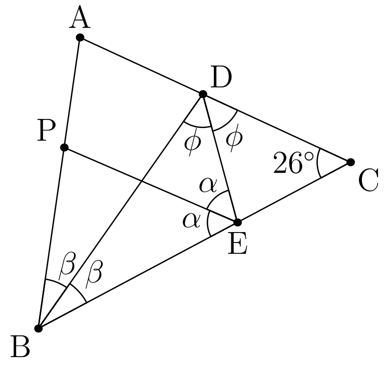
de donde $a^2 = 25$ y $c = 13$, luego, nos piden el valor de:

$$a^2 - \frac{1}{b} + 2c = 25 - 1 + 26 = 50.$$

Solución del problema 3:

Solución 1:

Sea P el punto de intersección entre la bisectriz de $\angle BED$ y AB, además $\angle ABD = \angle DBE = \beta$, $\angle BEP = \angle PED = \alpha$ y $\angle EDB = \angle EDC = \phi$.



En el triángulo DEC, notamos que $2\alpha = \phi + 26°$, luego

$$\phi = 2\alpha - 26°.$$

En el triángulo BDC

$$\beta = 180° - (2\phi + 26°) = 154° - 2\phi,$$

y por lo tanto

$$\beta = 154° - 2(2\alpha - 26°) = 206° - 4\alpha.$$

Como EP es perpendicular a AB, entonces $2\beta + \alpha = 90°$, entonces

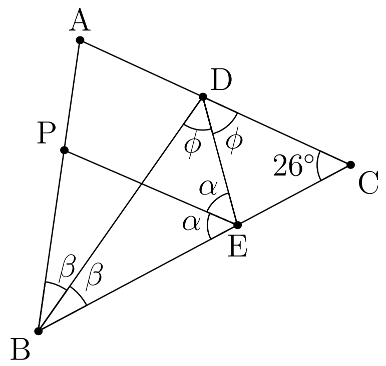
$$2(206° - 4\alpha) + \alpha = 90° \to \alpha = 46°$$

de donde $\phi = 66°$ y por lo tanto

$$\angle ADE = 180° - \phi = 180° - 66° = 114°$$

Solución 2:

Sea P el punto de intersección entre la bisectriz de $\angle BED$ y AB, además $\angle ABD = \angle DBE = \beta$, $\angle BEP = \angle PED = \alpha$ y $\angle EDB = \angle EDC = \phi$.



Veamos que por el triángulo BEP se tiene

$$\begin{aligned}&2\beta + \alpha = 90^\circ\\ &\Rightarrow 2\beta = 90^\circ - \alpha\end{aligned}$$

Por el cuadrilátero $ADEP$ se tiene

$$\begin{aligned}&\alpha + \phi + \angle BDA + \angle DAB + 90^\circ = 360^\circ\\ &\Rightarrow \phi + \angle BDA + \angle DAB - 180^\circ = 90^\circ - \alpha\end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores se puede obtener

$$\begin{aligned}&2\beta = \phi + \angle BDA + \angle DAB - 180^\circ\\ &\Rightarrow \angle BDA + \angle DAB = 180^\circ + 2\beta - \phi\end{aligned}$$

Ahora considerando el triángulo ABD se tiene

$$\begin{aligned}&\angle BDA + \angle DAB + \beta = 180^\circ\\ &\Rightarrow \angle BDA + \angle DAB = 180^\circ - \beta\end{aligned}$$

Ahora se pueden igualar las dos ecuaciones que se obtuvieron anteriormente

$$\begin{aligned}&180^\circ + 2\beta - \phi = 180^\circ - \beta\\ &\Rightarrow 3\beta = \phi\end{aligned}$$

Por lo que considerando el triángulo BDC se obtiene

$$\begin{aligned}&\beta + 2\phi + 26^\circ = 180^\circ\\ &\Rightarrow 7\beta = 154^\circ\\ &\Rightarrow \beta = 22^\circ\\ &\Rightarrow \phi = 66^\circ\\ &\Rightarrow \angle ADE = 180^\circ - \phi\\ &\Rightarrow \angle ADE = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ\end{aligned}$$

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 6 del nivel 2.

Solución del problema 5:

Solución 1:

Para relacionar los datos del problema, elevamos la primera ecuación al cuadrado, y obtenemos

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2 = 1^2\\ &\Rightarrow (a+b+c)^2 = 3\left(\frac{1}{3}\right)\\ &\Rightarrow (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)\\ &\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca)\\ &\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca\\ &\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 = 2ab+2bc+2ca\\ &\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = 0\\ &\Rightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) = 0\\ &\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0\end{aligned}$$

y como a, b, c son números reales concluimos que $a = b = c$, luego reemplazando en la primera ecuación obtenemos

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

finalmente la expresión que se pide calcular es igual a

$$\frac{7 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} + \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} + \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1}(7 + 6 + 3) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

Solución 2:
Al igual que en la solución 1 llegamos a demostrar que

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Pero por la Desigualdad de Reordenamiento se tiene que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

además se conoce que el caso de igualdad se cumple si y sólo si los términos son iguales, y como llegamos a que debe ocurrir la igualdad entonces $a = b = c$, pero como $a + b + c = 1$ entonces $a = b = c = \frac{1}{3}$, luego se concluye al igual que en la solución 1, que la respuesta es 4.

Solución del problema 6: Véase la solución del problema 7 del nivel 2.

Solución del problema 7: Lo demostraremos usando inducción en n. Para $n = 1$, la única opción para X es el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y estos números cumplen que $(-1) + 1 = 0$. Supongamos que el problema es cierto para cierto entero $n = k - 1$. Demostraremos que es cierto para $n = k$ por contradicción. Es decir, supondremos que existe un conjunto X que no cumple para $n = k$. Si k está en X, a lo más uno de los números en cada conjunto $\{-k, 0\}, \{-k + 1, 1\}, \ldots, \{-1, k - 1\}$ puede estar en X, por lo que X tiene a lo mas $k + 1$ enteros, lo cual es una contradicción y k no puede estar en X. De manera análoga podemos demostrar que $-k$ no está en X.
Luego, todos los elementos en X cumplen que su valor absoluto es a lo más $k-1$ y como son mas que $(k-1)+2$, por la hipótesis inductiva, podemos concluir que hay tres enteros a, b y c con $a + b = c$ y la inducción esta completa.

2.4 FASE FINAL

2.4.1 NIVEL 1

Solución del problema 1: Veamos que en el grupo de números 1, 2, 3 el número 3 (primer múltiplo de 3 positivo) no se escribe, en el grupo de números 4, 5, 6 el número 6 (segundo múltiplo de 3 positivo) no se escribe, y así sucesivamente, entonces podemos afirmar que si continuamos distribuyendo el análisis en grupos de 3 el último número que es múltiplo de 3 no se escribirá y los otros dos sí, es decir habrán dos números que se escribirán por cada grupo, como se desea llegar al puesto 2016 entonces se deberán analizar un total de $2016 \div 2 = 1008$ grupos ya que el último número que se escriba de dicho grupo será el número que se encontrará en la posición 2016, pero como dicho grupo terminarán en el 1008avo múltiplo de 3 positivo, que evidentemente corresponde al $1008 \cdot 3 = 3024$, entonces podemos concluir que el último número que se escribirá para llegar al puesto 2016 será $3024 - 1 = 3023$.

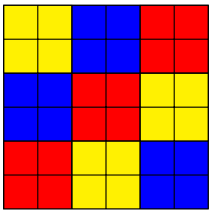
Solución del problema 2: Los posibles valores de la suma son 15 y 16. Notemos que la menor suma posible de 5 enteros positivos distintos es $1+2+3+4+5 = 15$ y por lo tanto si la suma es 15 entonces Daniel sabrá con certeza que los números escritos son 1,2,3,4,5 ya que es la menor suma posible. La única manera de escribir 16 como suma de 5 enteros positivos distintos es $1+2+3+4+6$, todas las otras maneras conllevan a tener al 2 sumandos iguales, al menos.
Notemos que $17 = 1+2+3+4+7 = 1+2+3+5+6$ y por lo tanto dada la suma, Daniel no puede saber con certeza los 5 sumandos del cuaderno de Andrea. En general, cualquier entero $S \geq 17$, lo podemos expresar como suma de 5 enteros positivos distintos de dos maneras distintas:

$$S = 1+2+3+4+x = 1+2+3+5+(x-1)$$

donde $x > 5$. Ya que $x > 5$, ninguno de los sumandos va a ser igual a otro.
Se concluye entonces, que los únicos dos valores que puede tomar la suma de los números escritos por Andrea son 15 y 16.

Solución del problema 3: El menor valor posible de n es 7. Por el principio de las casillas, si una fila/columna contiene 7 o más casillas, entonces existirán por lo menos 3 casillas del mismo color en esa fila/columna.

A continuación se muestra un cuadrado de lado 6 que cumple que ninguna fila ni columna tiene 3 cuadrados del mismo color, y apartir de él se pueden generar cuadrados de lado menor a 6 que cumple lo mismo.



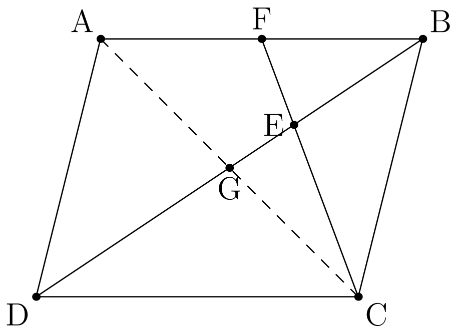
Por lo que se puede concluir que 7 es el mínimo.

Solución del problema 4: Veamos que la suma de 4 números naturales entre 1 y 9 es como mínimo $1+2+3+4 = 10$ y el máximo es $6+7+8+9 = 30$ que evidentemente hará que si Diana borra los números 1, 2, 3 y 4, y si Paola borra los números 6, 7, 8, y 9 se cumplirá lo que indica el problema, entonces el valor de x sería 5.

Por otro lado veamos que si Diana no borra todos los cuatro números más pequeños entonces la suma de sus números será mayor que 10, por lo que el triple de su suma será mayor que $3 \cdot 10 = 30$ pero esto es imposible ya que los números mayores suman 30 entonces no sería posible, y si Paola no borra todos los cuatro números mayores entonces su suma será menor que 30, por lo que su tercera parte será menor que $30 \div 3 = 10$ pero esto es imposible ya que los números menores suman 10 entonces no sería posible, con lo que la única forma en que se puede cumplir lo indicado en el problema es que los números sean borrados como se indicó en el primer párrafo, entonces el único valor posible de x es 5.

Solución del problema 5: En primer lugar notemos que para que un triángulo tenga sus tres lados de colores distintos es necesario y suficiente que los tres números asignados a sus vértices dejen restos distintos al ser divididos entre 3.
De los números del 1 al 40 hay exactamente 14 números múltiplos de 3 más 1, 13 números múltiplos de 3 más 2 y 13 números múltiplos de 3. Luego, contar el número de triángulos con lados de distinto color es equivalente a contar el número de ternas que se pueden formar utilizando exactamente un número de cada grupo, por el Principio del Producto tenemos que hay $14 \times 13 \times 13 = 2366$ triángulos con lados de distinto color.

Solución del problema 6: Se traza la recta AC que corta a DB en G.



En $\triangle ABC$, BG y CF son medianas; por lo tanto $FE = \frac{1}{2}(EC)$. Si $(BEC) = 100$ entonces $(EFB) = 50$ ya que comparten la misma altura.

Ahora veamos que $\triangle ABD$ y $\triangle FBC$ tienen la misma altura y $AB = 2(FB)$. Por lo tanto $(ABD) = 2 \cdot (FBC)$, y como $(FBC) = 150$ entonces $(ABD) = 300$.

Entonces tenemos que $(AFED) = (ABD) - (FBE) = 300 - 50 = 250$.

2.4.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: Notemos que el dígito del extremo izquierdo $d \geq 6$ ya que la suma de los otros dígitos es $\geq 0+1+2+3=6$.
Si $d=6$, existe sólo una representación de 6 como suma de 4 dígitos distintos, $0+1+2+3$. Estos dígitos pueden ser permutados de cualquier manera, así que habrán $4! = 24$ números que cumplan cuando $d=6$.
Si $d=7$, hay también solo una representación de 7 como suma de 4 dígitos distintos, $0+1+2+4$. Pueden permutarse así que habrán $4! = 24$ números que cumplan en el caso $d=7$.
Si $d=8$, hay dos maneras de representarlo como suma de 4 dígitos distintos, $8=0+1+2+5=0+1+3+4$. En este caso entonces hay $2(4!) = 48$ números que cumplan.
Si $d=9$, hay tres maneras de representarlo como suma de 4 dígitos distintos, $9=0+1+2+6=0+1+3+5=0+2+3+4$. En este caso entonces hay $3(4!) = 72$ números que cumplan.
Por lo tanto, en total hay $24+24+48+72=168$ números *ecuatorianos*.

Solución del problema 2:
Solución 1:
Se procederá por reducción al absurdo, supongamos que sí existen dichos enteros. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
y^2 &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 \\
&= 9x^2 + 2(1+2+3+\ldots+9)x + (1^2+2^2+\ldots+9^2) \\
&= 9x^2 + 2\left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)x + \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} \\
&= 3(3x^2+30x+95)
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$3 \mid y^2 \Rightarrow 3 \mid y \Rightarrow 3^2 \mid y^2 \Rightarrow 3^2 \mid 3(3x^2+30x+95) \Rightarrow 3 \mid 3x^2+30x+95 \Rightarrow 3 \mid 95$$

Pero esto último es una contradicción, pues 95 no es múltiplo de 3, por lo que hemos terminado la demostración.

Solución 2:
Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que $y^2 = 9x^2+90x+285$.
Lo anterior se cumple si y sólo si

$$9x^2+90x+285-y^2=0$$

Entonces esta ecuación debe tener soluciones enteras, por lo que

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-90 \pm \sqrt{8100-36(285-y^2)}}{2(9)} \\
&= -5 \pm \frac{\sqrt{-2160+36y^2}}{18} \\
&= -5 \pm \frac{6\sqrt{y^2-60}}{18} \\
&= -5 \pm \frac{\sqrt{y^2-60}}{3}
\end{aligned}$$

Entonces $3 \mid \sqrt{y^2-60} \Rightarrow 9 \mid y^2-60 \Rightarrow y^2 \equiv 60 (\bmod 9) \Rightarrow y^2 \equiv 6 (\bmod 9)$, pero los residuos cuadráticos en módulo 9 son 0, 1, 4 y 7, por lo que hemos llegado a una contradicción, con lo que hemos terminado la demostración.

Solución 3:
Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que

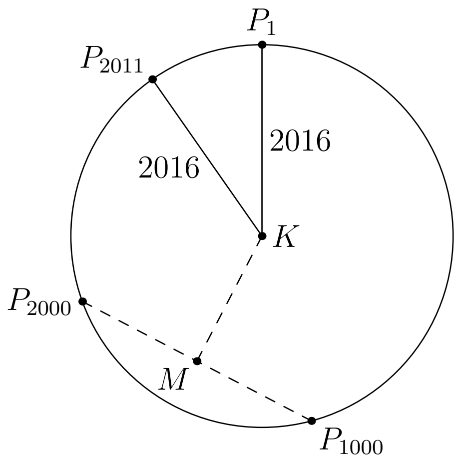
$$\begin{aligned} & y^2 = 9x^2 + 90x + 285 \\ \iff\ & y^2 = \left(9x^2 + 90x + 225\right) + 60 \\ \iff\ & y^2 = (3x+15)^2 + 60 \\ \iff\ & 60 = y^2 - (3x+15)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

De esta manera se puede afirmar que $y > 3x+15$, es decir que $y \geq 3x+16$, pero además como $y^2-(3x+15)^2 = 60$ entonces y y $3x+15$ deben tener la misma paridad para que su diferencia sea par, entonces $y \geq 3x+17$, por lo que

$$\begin{aligned} y^2 - (3x+15)^2 &\geq (3x+17)^2 - (3x+15)^2 \\ &\geq (3x+17-3x-15)(3x+17+3x+15) \\ &\geq (2)(6x+32) \\ &\geq 12x+64 \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{Z}^+$ entonces $12x+64 > 60$ por lo que $y^2 - (3x+15)^2 > 60$, pero por (1) se tendrá entonces que $60 > 60$ lo cual es un absurdo, de esta manera hemos llegado a la contradicción que permite concluir con la demostración.

Solución del problema 3: Existen dos casos para el problema:
Caso 1: $P_{1000}P_{2000} \nparallel P_1P_{2011}$.



Lema 1. Es bien conocido que la mediatriz de un segmento se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Lema 2. El centro de una circunferencia siempre es un punto equidistante a cualquier punto que pertenezca a la circunferencia, por ende, el centro pertenece a la mediatriz de cualquier cuerda.

En nuestro problema, como $KP_1 = KP_{2011}$, por nuestro *Lema 1*, K pertenece a la mediatriz de P_1P_{2011}, análogamente como KM es perpendicular a $P_{1000}P_{2000}$ y M es el punto medio de $P_{1000}P_{2000}$, por nuestro *Lema 1*, K pertenece a la mediatriz de $P_{1000}P_{2000}$. Sabemos que dos rectas se intersecan en a lo mucho un punto, y K es la intersección de las mediatrices de P_1P_{2011} y $P_{1000}P_{2000}$, pero por nuestro *Lema 2*, esas dos mediatrices se deben intersecar en el centro de la circunferencia que pasa por los puntos, P_1, P_{2011}, P_{1000}, P_{2000} (por datos del problema, es la misma que pasa por los 2016 puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{2016}$). Concluimos entonces que K es el centro de aquella circunferencia y por lo tanto $KP_{2016} = 2016$.

Caso 2: $P_{1000}P_{2000} \parallel P_1P_{2011}$.
En este caso KM será mediatriz de $P_{1000}P_{2000}$ y de P_1P_{2011}, luego la recta KM determina un diámetro de la circunferencia por lo que K puede ser cualquier punto del diámetro entonces KP_{2016} no tiene un valor fijo.

Solución del problema 4:

Solución 1:

Como todos los sumandos de T son pares, lo dividimos entre dos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$
$$\frac{T}{2} = 50 + 49 + 48 + 47 + \ldots + (51 - n)$$

De ahi es facil ver que:

$$S + \frac{T}{2} = 51n,$$

y como queremos que $S = T$, al reemplazar obtenemos $\frac{3S}{2} = 51n$. Pero es claro que $S = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces:

$$\frac{3S}{2} = \frac{3n(n+1)}{4} = 51n \to n + 1 = 68 \to n = 67$$

Solución 2:

Veamos que $S = \frac{n(n+1)}{2}$ y que $T = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1)(-2))$, esto haciendo uso de las fórmulas de progresiones aritméticas, entonces se busca que

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1)(-2)) \\
\iff & n + 1 = 2 \cdot 100 + (n-1)(-2) \\
\iff & n + 1 = 200 - 2n + 2 \\
\iff & n + 1 = 202 - 2n \\
\iff & 3n = 201 \\
\iff & n = \frac{201}{3} = 67
\end{aligned}$$

Solución del problema 5: Véase la solución del problema 6 del nivel 1.

Solución del problema 6: *Lema.* Sean a y b enteros positivos, entonces $(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1$ y la igualdad se cumple si y solo si $a = 1$ o $b = 1$.

Prueba. Sean a y b enteros positivos. Veamos que:

$$\begin{aligned}
&(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1 \\
\iff & 4ab - 2a - 2b + 1 \geq 2ab - 1 \\
\iff & 2ab - 2a - 2b + 2 \geq 0 \\
\iff & 2(a-1)(b-1) \geq 0,
\end{aligned}$$

Lo cual es cierto y claramente la igualdad se cumple cuando $a = 1$ o $b = 1$.

Aplicando el lema tenemos que:

$$(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1$$
$$(2c-1)(2d-1) \geq 2cd - 1.$$

Ademas, también se cumple que $(2ab-1)(2cd-1) \geq 2abcd - 1$. Luego, tenemos que

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1$$

y la igualdad se cumple cuando los tres casos de igualdad de las desigualdades anteriores se cumplen, es decir, cuando $ab = 1$ o $cd = 1$, $a = 1$ o $b = 1$ y $c = 1$ o $d = 1$; lo que es equivalente a que tres de los números a, b, c, d sean iguales a 1. Finalmente los números $\overline{abcd}$ que satisfacen dicha condición son:

$$1111, \overline{a111}, \overline{1b11}, \overline{11c1}, \overline{111d}$$

(con $a, b, c, d \neq 1$), que en total son $1 + 8 \times 4 = 33$ números.

2.4.3 NIVEL 3

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 2 del nivel 2.

Solución del problema 2:

Solución 1:

Notemos que ya que la recta l no pasa por ninguno de los vértices, entonces dividirá el plano en dos conjuntos de puntos A y B, con $|A| = a$ y $|B| = b$ cantidad de puntos en cada semiplano donde $a + b = 2017$. Ésto implica que exactamente uno de los dos, a o b es par. La recta l corta a cada segmento que une un punto de A con un punto de B. En total hay ab segmentos que la recta l corta. De estos ab segmentos, todos son diagonales excepto por dos de ellos, que son lados del polígono. Por lo tanto hay $ab-2$ diagonales que la recta l corta, y ya que a o b es par, entonces $ab-2$ también será par.

Solución 2:

Como la recta l no pasa por vértices entonces corta a dos lados en su interior y por tanto separa al polígono dejando una cantidad de vértices en una región y el resto en la otra región.

Sabemos que de cada vértice salen 2014 diagonales, de las cuales, las que van de un semiplano (el plano dividido por l) a otro serán cortadas por la recta l. De modo que, para contar las que se cruzan se pueden contar todas las diagonales que salen de los vértices en un semiplano de la recta l, esta cuenta tiene la forma $2014x$, luego se debe descontar el doble de las diagonales que se queden en el mismo semiplano, porque contando todas las diagonales que salen de cada vértice, estas son contadas dos veces, esta cuenta tiene la forma $2y$, por lo que el número de diagonales que son intersectadas por la recta l es $2014x - 2y$ que evidentemente es par.

Solución del problema 3:

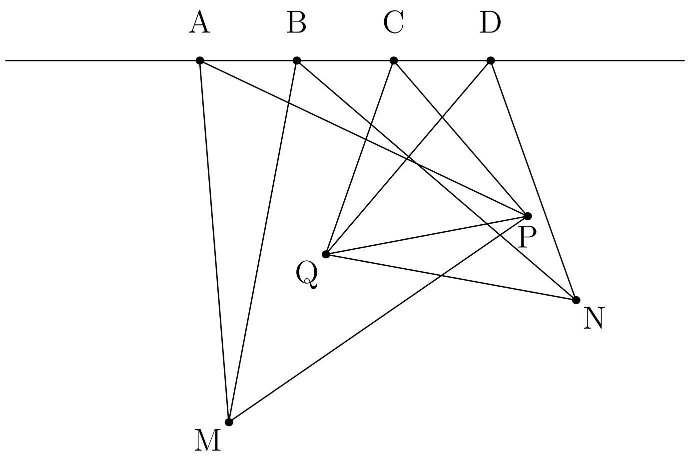
Solución 1:

Recordemos primero algunas propiedades importantes de las rotaciones:

Lema 1. Si un triángulo E_1FG_1 rota un ángulo α alrededor del vértice F, obteniéndose de esta forma el triángulo E_2FG_2, entonces el ángulo que forman las rectas E_1G_1 y E_2G_2 es α.

Lema 2. Si un triángulo E_1FG_1 rota $60°$ alrededor de F, obteniéndose de esta forma el triángulo E_2FG_2, entonces el triángulo E_1FE_2 es equilátero. Lo mismo sucede con el triángulo G_1FG_2.

Ahora, trabajaremos en el problema. Usaremos ángulos dirigidos módulo $180°$.



Como los triángulos APM y CQP son equiláteros y $\measuredangle APC = \measuredangle MPQ$ (ya que $\measuredangle APC = \measuredangle APM + \measuredangle MPC$ y $\measuredangle MPQ = \measuredangle MPC + \measuredangle CPQ$), es fácil notar que los triángulos APC y MPQ son congruentes (por el caso de lado-ángulo-lado), es más, podemos afirmar que el triángulo MPQ es el resultado de rotar $60°$ el triángulo APC, en consecuencia, por el *Lema 1*, las rectas MQ y AD forman un ángulo de $60°$.

Sean $AB = BC = CD = l$, como $AC = 2l$ entonces $MQ = 2l$. Sea $R = MQ \cap AD$. Como $\measuredangle DNQ = \measuredangle QED = 60°$, los puntos N, D, R y Q son concíclicos. Por tanto $\measuredangle NQM = \measuredangle NQR = \measuredangle NDR = \measuredangle NDA$.

Fijémonos en los triángulos NQM y NDB, tenemos que $NQ = ND$, $\measuredangle NQM = \measuredangle NDA$ y $MQ = BD = 2l$, luego los triángulos NQM y NDB son congruentes, además, como $\angle QND = 60°$ el triángulo NDB es el resultado de rotar $60°$ el triángulo NQM. Por *Lema 2* en triángulo NBM es equilátero, con esto concluimos que $\angle MBN = 60°$.

Solución 2:
Esta solución será por geometría analítica, haciendo uso de los números complejos.
Definamos para todo punto X su complejo como $X = x$, con $x \in \mathbb{C}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que L es el eje real del plano complejo, su origen el punto B y $a = -1$.

Claramente $b = 0$, $c = 1$ y $d = 2$. Como Q es un punto cualquiera del plano entonces sea $Q = q$ con $q \notin \mathbb{R}$. Sea $\epsilon = \cos(60°) + i\,\mathrm{sen}(60°)$, entonces $\overline{\epsilon} = \cos(-60°) + i\,\mathrm{sen}(-60°)$ y $\epsilon\overline{\epsilon} = 1$.

Veamos que $p = (q-1)\epsilon + 1$, luego $m = (p+1)\overline{\epsilon} - 1 = ((q-1)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} - 1$, así como $n = (q-2)\epsilon + 2$.

Ahora vamos a demostrar que m es una rotación de n con centro en B y ángulo de $-60°$, esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} n\overline{\epsilon} &= m \\ \iff ((q-2)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} &= ((q-1)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} - 1 \\ \iff (q-2)\,\epsilon\overline{\epsilon} + 2\overline{\epsilon} &= (q-1)\epsilon\overline{\epsilon} + 2\overline{\epsilon} - 1 \\ \iff q - 2 + 2\overline{\epsilon} &= q - 1 + 2\overline{\epsilon} - 1 \end{aligned}$$

Lo último es evidente que es cierto, con lo que se conluye que $\angle MBN = 60°$.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 6 del nivel 1.

Solución del problema 5: Véase la solución del problema 6 del nivel 2.

Solución del problema 6: Consideremos los valores de S $= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ cuando c_i se escogen del conjunto $\{0, 1\}$. S no puede ser un múltiplo de n^3. Hay $2^n - 1$ valores posibles para S (sin incluir el caso en el que todos los c_i son 0). Si hay dos valores iguales, podemos restarlos entre ellos y obtener $0 = S^{'} = c_1^{'}x_1 + c_2^{'}x_2 + ... + c_n^{'}x_n$ donde los $c_i^{'}$ pueden ser también -1. Por el principio de las casillas debemos tener que $n^3 \geq 2^n - 1$. Por lo tanto n es a lo mucho 9. Es fácil ver que $(x_1, x_2, x_3, ..., x_9) = (1, 2, 4, ..., 256)$ es una construcción válida para $n = 9$ por lo tanto el mayor entero positivo *olímpico* es 9.

2.4.4 NIVEL U

Solución del problema 1: Sean a, b los números complejos representados por A y B en el plano complejo. Sea Z un punto sobre la recta r, que representa al número complejo z. Sea $P(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ el polinomio considerado. Luego $P"(x) = 6px + 2q$, y por ende la raíz y de $P"$ cumple $y = \frac{-2q}{6p} = -\frac{q}{3p}$. El teorema de Viéte asegura que $a + b + z = -\frac{q}{p}$, por tanto $y = \frac{a+b+z}{3}$, y se concluye que la raíz de la segunda derivada es el centroide del triángulo formado por la raíces del polinomio original.
Sea M el punto medio del segmento AB, entonces la raíz y es tal que divide al segmento ZM en una razón constante $\frac{ZY}{YM} = 2$, como Z se mueve sobre la recta r, entonces por el teorema de Tales Y se mueve por una recta paralela a r. Se concluye que el lugar geométrico de la raíz de la segunda derivada de P es una recta paralela a r en el plano complejo.
Nota: La segunda parte se puede trabajar algebraicamente considerando una expresión adecuada para r.

Solución del problema 2: Denotemos por $f(m)$ el número asociado con el número m. Por ejemplo $f(2016) = 12$. Los determinantes poseen la propiedad de que si dos matrices tienen todas sus filas (o columnas) iguales a excepción de una, entonces el determinante de la suma es igual a la suma de los determinantes.
Considerando todos los números de n^2 dígitos, éstos se pueden subdividir en grupos de 10^n números tales que los primeros $n^2 - n$ dígitos son iguales, y por ende la suma de los números $f(m)$ es igual al determinante de la suma dentro de cada grupo. Como cada grupo tiene la misma cantidad de números, entonces la última fila es la misma para cada uno de estos grupos. Se repite el proceso con n dígitos siguientes, y así sucesivamente hasta tener un sólo determinante.
Si $n = 1$, entonces el resultado es igual a la suma de los números del 1 al 9, es decir 45. Si $n = 2$, entonces el resultado es igual al determinante

$$\det \begin{bmatrix} 450 & 405 \\ 450 & 450 \end{bmatrix} = 20250$$

Si $n \geq 3$, entonces las dos últimas filas de este determinante de la suma son iguales y por tanto el determinante es igual a 0.
Nota: Para $n \geq 3$, si las dos últimas columnas son iguales, entonces el determinante es 0. Si las dos últimas columnas son distintas, cambiar el orden implica multiplicación por -1, luego esta matriz se cancela con aquella que tiene las otras columnas iguales y las dos columnas intercambiadas. Por ende, se concluye que la suma es 0. Para $n = 2$, se utiliza este argumento para reducir el número de determinantes y trabajar directamente con las restantes (que tienen 0 en la esquina superior derecha).

Solución del problema 3: Definamos I a la integral pedida. Luego

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

$$I = \lim_{a\to\infty} \left(\int_{\frac{1}{a}}^{1} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt + \int_{1}^{a} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt \right)$$

La primera integral está acotada por el término $t^{\frac{1}{2}}$ en su intervalo de soporte, y la segunda integral está acotada por el término e^{-2016t} en su intervalo de soporte. Como ambas cotas convergen en sus respectivos intervalos, se tiene que la integral necesariamente converge.
Se hace la sustitución $\frac{1}{t}$ por t en la primera integral, luego

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{1} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{1} t^{\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} \frac{-1}{t^2} dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} t^{\frac{-3}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} \right) e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

Finalmente se hace la substitución $u = 2016^{0.5}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}}\right)$ y se tiene que

$$I = 2(2016)^{-0.5} \lim_{a\to\infty} \int_0^{2016^{0.5}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}\right)} e^{-u^2-4032} du$$

$$I = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \lim_{a\to\infty} \int_0^{2016^{0.5}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}\right)} e^{-u^2} du$$

$$I = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I = e^{-4032}\sqrt{\frac{\pi}{2016}}$$

Solución del problema 4: Sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

Luego por la propiedad telescópica de la suma se tiene que

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\right) = \frac{2^1}{3^1-2^1} - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \lim_{N\to\infty}\left(2 - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}\right)$$

$$= 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1.5^{N+1}-1} = 2$$

ya que $\lim_{N\to\infty} a^N = \infty$ si $a > 1$.
Nota: Alternativamente se puede usar que

$$\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{3^n}{3^n-2^n} - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

y el hecho que $\lim_{N\to\infty} a^N = 0$ si $-1 < a < 1$

Solución del problema 5: Definimos: a_n la probabilidad de que hasta el paso n el mensaje sea correcto, b_n la probabilidad de que hasta el paso n haya exactamente una palabra incorrecta, c_n la probabilidad de que hasta el paso n haya exactamente dos palabras incorrectas y d_n la probabilidad de que hasta el paso n todas las palabras estén incorrectas. Obviamente $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ para todo n
Las siguientes recurrencias son obvias debido a la simetría del problema

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}$$

$$d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{6}c_{n-1}$$

Ahora definamos $x_n = a_n + d_n$ e $y_n = b_n + c_n$, obviamente $x_n + y_n = 1$. Por tanto se tiene que

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{6}y_{n-1}$$

$$y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{5}{6}y_{n-1}$$

Luego se tiene que

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - x_{n-1}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_{n-1}$$

Junto con $x_0 = 1$, se concluye que $x_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ para todo $n \geq 0$.
Ahora definamos $s_n = a_n - d_n$ y $t_n = b_n - c_n$. Por tanto se tiene que

$$s_n = \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{6}t_{n-1}$$

$$t_n = \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{6}t_{n-1}$$

Obviamente $s_n = t_n$, luego se tiene que $s_n = \frac{1}{3}s_{n-1}$, junto con $s_1 = \frac{1}{2}$, se concluye que $s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Finalmente, se tiene que para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{x_n + s_n}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Nota: Hay varias alternativas para resolver las recurrencias, por ejemplo se puede considerar el sistema de primer orden de ecuaciones en diferencias y hallar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz que describe el sistema y usar las condiciones iniciales.

Solución del problema 6: Denotemos $2S = \{2a : a \in S\}$ y $\#S$ el cardinal del conjunto S. De las condiciones dadas, para todo $a \in S$, se puede escribir de forma única $2a = s_a x_a$ con $s_a \in S$ y $x_a \in \{-1, 1\}$. Luego se concluye que $S \cap 2S = \{a \in S : x_a = 1\}$.
Consideremos el producto de x_a para todos los elementos de S, luego tenemos que $\prod_{a \in S} x_a = (-1)^{\#S - N}$. Como p es un impar $p^2 - 1$ es divisible para 4, y por tanto $\#S$ es par, de donde se concluye que $\prod_{a \in S} x_a = (-1)^N$.
Por otro lado, en F se tiene que

$$2^{\frac{p^2-1}{2}} \prod_{a \in S} a = \prod_{a \in S} 2a = \prod_{a \in S} s_a x_a = \prod_{a \in S} x_a \prod_{a \in S} s_a = (-1)^N \prod_{a \in S} a$$

Por tanto $2^{\frac{p^2-1}{2}} = (-1)^N$ ya que $a \neq 0$ para todo $a \in S$. Finalmente, el pequeño teorema de Fermat asegura que $2^{p-1} = 1$, y por ende $2^{\frac{p^2-1}{2}} = \left(2^{p-1}\right)^{\frac{p+1}{2}} = 1$ pues $\frac{p+1}{2}$ es un entero. Se concluye que $(-1)^N = 1$ y por ende N es par.

3 PREMIADOS

3.1 NIVEL 1

MEDALLAS DE ORO
GIACOMO YU CHEN
ZHIRON CRISTINA WU YUAN
OSCAR YOUSSEF HILL ZOUEIN

MEDALLAS DE PLATA
JULIO ENRIQUE VICHE CASTILLO
DANIEL SUAREZ
DAVE ALEXANDER VELOZ ALVARADO
JOSUE ESTEBAN INFANTE CARVAJAL
MATTHEW JAVIER OCHOA MALDONADO
DANIELA MARCELA BALDEON MATA
SUSANA NOEMI GUASTAY MOROCHO

MEDALLAS DE BRONCE
JUAN JOSE ASCENCIO VELARDE
MAURICIO ADRIAN MANTILLA RUALES
ANA VICTORIA ZURITA DOUMET
MARIA JOSE BERRU HUACON
VIOLETA VICTORIA GOMEZ GAMBOA
VALERIA ISABEL LAM MACIAS
DANIELA ARIANA ORDEÑANA PEÑAFIEL
BERNARDO JOSE PEREZ LOPEZ
MATIAS LEONARDO LOAYZA CORREA

MENCIONES DE HONOR
REBECA NICOLE GUIM GONZALEZ

- Cortes para medallas:
  - Oro: 23 Puntos
  - Plata: 15 Puntos
  - Bronce: 8 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 24 Puntos

    JULIO ENRIQUE VICHE CASTILLO
  - Puntaje más alto en la Fase 2: 14 Puntos

    MAURICIO ADRIÁN MANTILLA RUALES
  - Puntaje más alto en la Fase 3: 49 Puntos

    GIACOMO YU CHEN

3.2 NIVEL 2

MEDALLAS DE ORO

YU PENG
PEDRO ANDRÉS SUÁREZ AGUIRRE
MARIA GRATZIA INDACOCHEA ROSADO

MEDALLAS DE PLATA

VALERIA ESTEFANIA BARCO SANTANA
JOSÉ PEREZ
YIFAN CHEN WU
DIEGO SEBASTIAN RONQUILLO MANOSALVAS
ALEJANDRO SEBASTIAN RODRIGUEZ URGILEZ
CARLOS ENRIQUE VEGA HERNANDEZ

MEDALLAS DE BRONCE

ANGEL ADRIAN CARRILLO VEGA
ANTONELLA CRISTINA CORTES LEMOS
HARRY BRADD ZERDA SALDARRIAGA
XUELONG AN WANG
ANDREI ALESSANDRO ARMIJOS ELIZALDE
DAVID ANDRES DELGADO GARCES
NICOLAS GONZALEZ GRANDA
BRUNO TRIANA FABRE
SANTIAGO MIGUEL VELAZQUEZ

MENCIONES DE HONOR

PATRICIO COBOS
LEONARDO EMANUEL ZAMBRANO LOPEZ
SANTIAGO AVILES
RUT CRISTINA MARTINEZ BERGELUND
ROBERTH HUMBERTO BASTIDAS VEINTIMILLA
SEBASTIAN MATEO TORRES MOLINA
JOSUE GABRIEL REINOSO TORRES

- Cortes para medallas:
  - Oro: 31 Puntos
  - Plata: 19 Puntos
  - Bronce: 14 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 25 Puntos

    YIFAN CHEN WU
    YU PENG
    PEDRO ANDRÉS SUÁREZ AGUIRRE

  - Puntaje más alto en la Fase 2: 15 Puntos

    VALERIA ESTEFANÍA BARCO SANTANA
    YIFAN CHEN WU
    MARÍA GRATZIA INDACOCHEA ROSADO

  - Puntaje más alto en la Fase 3: 49 Puntos

    PEDRO ANDRÉS SUÁREZ AGUIRRE

3.3 NIVEL 3

MEDALLAS DE ORO

SEBASTIAN DAVID REGALADO LOZANO
JOSEPH TAPIA PARRA
CHRISTOPHER ARIEL MOLINA CHIRIBOGA

MEDALLAS DE PLATA

DANIEL JEREMÍAS MALAVE MOREIRA
ANA PAULA INDACOCHEA ROSADO
VALERIE DENISSE BUSTOS BUENO
ANGIE NICOL TUAREZ DIAZ
ANGELA DIANA BASTIDAS MALPARTIDA
SAMANTHA NICOLE CARRILLO RIOS

MEDALLAS DE BRONCE

DIANNE DENISSE CRUZATTY
CARLOS HUMBERTO JIMENEZ FARFAN
MARCELO ANDRES IBARRA CRUZ
ANGIE ROMINA LEON PEÑAFIEL
MARIA PAULA CORTES LEMOS
DANNY STEVEN PEÑALOZA TINOCO
ANGEL DAVID REYES ESPINOZA
SEBASTIAN VALLARINO
EDUARDO JOSUE ABAD GAVILANES

- Cortes para medallas:
  - Oro: 27 Puntos
  - Plata: 16 Puntos
  - Bronce: 8 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 25 Puntos

    SEBASTIÁN DAVID REGALADO LOZANO
  - Puntaje más alto en la Fase 2: 14 Puntos

    SEBASTIÁN DAVID REGALADO LOZANO
  - Puntaje más alto en la Fase 3: 43 Puntos

    SEBASTIÁN DAVID REGALADO LOZANO

3.4 NIVEL U

MEDALLAS DE ORO

EMILIO JOSE ROSADO CORDOVA
ANTHONY JOSHUE FLORES AZÚA

MEDALLAS DE PLATA

EDDY SANTIAGO ACHIG
OMAR PALADINES
PAOLO CUELLAR
ADRIAN DELGADO

MEDALLAS DE BRONCE

MELVIN HENRY POVEDA QUIMIZ
ROBERTO ESTEBAN AVALOS MORALES
DARIO ANDRES TERAN ACARO
KUNTUR MALLKU MUENALA TERAN
LEONARDO JOSE ORTIZ MONCAYO
JAVIER ENRIQUE PEREZ LOPEZ

- Cortes para medallas:
  - Oro: 19 Puntos
  - Plata: 16 Puntos
  - Bronce: 5 Puntos
- Puntaje más alto en la fase clasificatoria: 19 Puntos

MELVIN HENRY POVEDA QUIMIZ

4 EQUIPO DE TRABAJO

La organización de la Olimpiada Nacional de Matemáticas 2016 fue realizada gracias al trabajo de:

- Romnie Acosta (OMEC)
- Eduardo Alba (SEDEM)
- Fernando Álvarez (OMEC)
- Danielle Aycart (OMEC)
- Jorge Chamaidán (OMEC)
- Nelson Córdova (USM)
- Paolo Cuellar (OMEC)
- Adrián Delgado (OMEC)
- Pedro Espinoza (UETS)
- Anthony Flores (OMEC)
- Fernando Gómez (OMEC)
- Qi Han (OMEC)
- David Hervas (SEDEM)
- Galo Lara (OMEC)
- Lissette Maingón (OMEC)
- Hugo Mena (USM)
- Eugenia Molina (UEPRIM)
- Andrea Moreira (SEDEM)
- Eladio Oliveros (USM)
- Miguel Ordóñez (OMEC)
- Omar Paladines (OMEC)
- Javier Pérez (OMEC)
- Paula Pettinelli (USM)
- Julio Rivera (OMEC)
- Marcelo Rodríguez (OMEC)
- Daniel Samaniego (OMEC)
- Alfredo Sánchez (OMEC)
- Leslie Santamaría (USM)
- Xavier Soriano (OMEC)
- Vicente Torres (OMEC)

5 AUSPICIANTES

Un agradecimiento a los auspiciantes del evento:

- Universidad Santa María, Campus Guayaquil (USM)
- Sociedad Ecuatoriana de Matemáticas (SEDEM)
- Unidad Educativa Particular Bilingüe Principito & Marcel Laniado de Wind (UEPRIM)
- Unidad Educativa Técnico Salesiano (UETS)
- WQ Radio