OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS

OMEC

2017

ÍNDICE

1 ENUNCIADOS

1.1 PRIMERA FASE

1.1.1 NIVEL 1

Problema 1. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que $\sqrt{2+0+1+7+n}$ es entero?

A) -1 B) 4 C) 6

D) 15 E) 16

Problema 2. Adrián es más alto que Anthony pero más pequeño que María. Ana es más alta que Andrea, pero más pequeña que Adrián. ¿Quién es la persona más alta?

A) Adrián B) Anthony C) María

D) Ana E) Andrea

Problema 3. Mario escribió un dígito y después escribió otro a la derecha; posteriormente sumó 19 al número de dos dígitos que tenía y obtuvo 72. ¿Cuál es el primer dígito que escribió Mario?

A) 3 B) 7 C) 5

D) 8 E) 6

Problema 4. Se tiene un segmento AB de 24 cm de longitud. Entre A y B se ubica el punto P de modo que $AP = \frac{1}{4}AB$. ¿Cuánto mide PB?

A) 6 cm B) 8 cm C) 12 cm

D) 18 cm E) 96 cm

Problema 5. Lourdes pagó \$1.50 por 3 paletas. Matías pagó \$2.40 por dos galletas. ¿Cuánto pagó Inés por una paleta y una galleta?

A) \$1.4 B) \$1.5 C) \$1.6

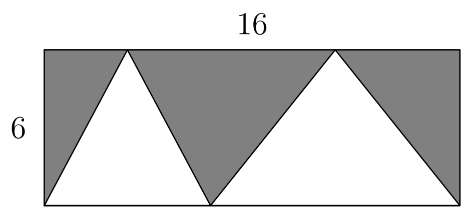
D) \$1.7 E) \$1.8

Problema 6. Heivi escribe todos los números impares entre 122 y 188. ¿Cuántos números escribió?

A) 32 B) 33 C) 34

D) 65 E) 66

Problema 7. En el siguiente rectángulo de 6×16, encontrar el área de la región sombreada.



A) 96 B) 48 C) 32

D) 22 E) 11

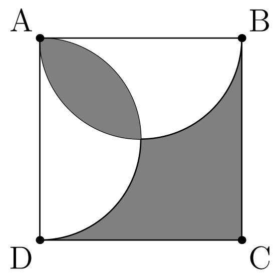
Problema 8. El piso de un cuarto rectangular está completamente cubierto por baldosas cuadradas. El cuarto tiene 9 baldosas de largo y 5 baldosas de ancho. Encontrar el número de baldosas que tocan las paredes del cuarto.

A) 14 B) 24 C) 26
D) 28 E) 45

Problema 9. Un rectángulo tiene lados 4 y 8. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tenga el mismo perímetro que el rectángulo?

A) 12 B) 24 C) 8
D) 3 E) 6

Problema 10. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ y dos semicírculos con diámetros AB y AD. Si $AB = 2$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



A) 2 B) 1 C) 4
D) $4 - \pi$ E) $3 - \frac{\pi}{2}$

Problema 11. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen que $9 < \sqrt{n} < 10$?

A) 0 B) 1 C) 18
D) 2 E) 17

Problema 12. Se tienen 3 cajas y 3 objetos: una moneda, una concha y un guisante. Cada caja contiene un objeto. Se sabe que:

- La caja verde está a la izquierda de la caja azul.
- La moneda está a la izquierda del guisante.
- La caja roja está a la derecha de la concha.
- El guisante está a la derecha de la caja roja.

¿En qué caja está la moneda?

A) Está en la caja verde B) Está en la caja azul C) Está en la caja roja
D) No se puede saber con seguridad E) Podría estar en cualquiera de las cajas

Problema 13. Si doblamos un vértice de un cuadrado, ¿cuántos vértices no puede tener el polígono resultante?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Problema 14. En la chaqueta de un gigante hay 585 bolsillos; en cada uno viven 3 ratones, y cada ratón está acompañado por 5 ratoncitos. ¿Cuántos ratoncitos viven en la chaqueta del gigante?

A) 1760 B) 593 C) 8778

D) 8775 E) 4680

Problema 15. Con los dígitos 0 y 1, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden escribir?

A) 0 B) 16 C) 32

D) 11111 E) 10000

Problema 16. A partir de un cierto día Juan, Jafet, Henry, Mauricio y Rodrigo van a jugar baloncesto en una cancha cerca de sus casas. Juan, Jafet, Henry, Mauricio y Rodrigo van a jugar cada 3, 21, 15, 8, 11 días, respectivamente. ¿Cuál es la menor cantidad de días que deben pasar para que todos vayan a jugar el mismo día?

A) 1 B) 168 C) 2310

D) 9240 E) 83160

Problema 17. Para la cena hay 3 pizzas. Cada pizza tiene 8 porciones. Cada porción tiene 2 aceitunas; además hay una aceituna en el centro de cada pizza. ¿Cuántas aceitunas hay en total?

A) 51 B) 54 C) 45

D) 48 E) 50

Problema 18. A lo largo de una reunión todo par de personas se saludan entre sí con solamente un apretón de manos. Se sabe que asistieron 10 personas a la reunión. ¿Cuántos apretones de mano hubieron en la reunión en total?

A) 55 B) 36 C) 45

D) 10 E) 90

Problema 19. ¿Cuál de los siguientes es un triángulo isósceles no equilátero?

A) Un triángulo rectángulo con ángulos de 30°, 60° B) Un triángulo con ángulos de 30°, 100° C) Un triángulo con ángulos de 50°, 80°

D) Un triángulo cuyos tres lados son iguales E) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 40°

Problema 20. Un número de dos dígitos es igual a 5 unidades menos que tres veces la suma de sus dígitos. Encontrar el número.

A) 16 B) 11 C) 38

D) 17 E) 12

Problema 21. Si se calculan los valores de las siguientes expresiones y se ordenan de menor a mayor, ¿cuál número queda en el medio?

A) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}$

D) $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$

Problema 22. En una tira de papel de 1 m de longitud se hacen marcas dividiendo la tira en 4 partes iguales, y, en el mismo lado de la tira, se vuelven a hacer marcas dividiéndola en 3 partes iguales. Después de eso, se corta la tira por todas las marcas que se han señalado. ¿Cuántas longitudes diferentes tienen los trozos de la tira?

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

Problema 23. Un círculo tiene área 36π y se dibuja un cuerda en él de longitud 8. Adrián quiere caminar desde el centro del círculo hacia la cuerda. ¿Cuál es la menor distancia que puede caminar?

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{13}$ C) 6

D) 18 E) $2\sqrt{77}$

Problema 24. Hallar el valor de n tal que un cuadrado de lado 27 se puede dividir en exactamente n cuadrados de lado n.

A) 3 B) 18 C) 9

D) 27 E) 729

Problema 25. Katty tiene billetes de $5 y de $2. Tiene que pagar $90, sin que le den vuelto. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

A) 9 B) 10 C) 18

D) 20 E) 45

1.1.2 NIVEL 2

Problema 1. Joyce tiene 11 billetes de \$10 y le regalan igual cantidad de billetes de \$2. Ahora tiene:

A) \$22 B) \$110 C) \$121
D) \$132 E) \$144

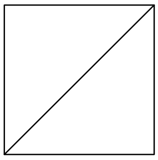
Problema 2. ¿Qué cuatro cifras hay que borrar del número 4921508, sin cambiar el orden, para obtener el mayor número posible de 3 cifras?

A) 4210 B) 4921 C) 4215
D) 9218 E) 9508

Problema 3. ¿Cuál es el residuo cuando el cuadrado de 36 es dividido para la raíz cuadrada de 36?

A) 5 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

Problema 4. En el cuadrado mostrado, la longitud de la diagonal es 8.



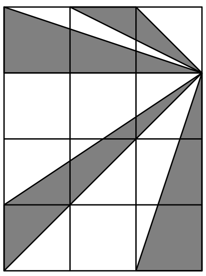
¿Cuál es el área del cuadrado?

A) 16 B) 24 C) 32
D) 36 E) 40

Problema 5. Un litro de limonada contiene el 50% de agua. ¿Qué porcentaje de agua contendrá la limonada, si alguien se bebe medio litro?

A) 25% B) 40% C) 50%
D) 80% E) 100%

Problema 6. ¿Cuál es la área sombreada en el diagrama si el lado de cada cuadrado es igual a 2 cm?



A) $\frac{15}{2}$ B) 20 C) 8
D) 10 E) $\frac{13}{2}$

Problema 7. El producto entre 150 y el entero positivo n es un cubo perfecto. ¿Cuál es el menor valor posible de n?

A) 60 B) 180 C) 270
D) 300 E) 360

Problema 8. Hay 17 personas en el club de literatura. Además, hay 25 personas que están en el club de matemáticas o en el club de literatura, o ambos. También se sabe que hay 5 personas en ambos clubes. ¿Cuántas personas hay en el club de matemáticas?

A) 5 B) 9 C) 10

D) 12 E) 13

Problema 9. La longitud de una circunferencia es 40 cm. ¿Cuál es el área del círculo?

A) $\frac{400 \text{ cm}^2}{\pi}$ B) $\frac{400\pi \text{ cm}^2}{2}$ C) $\frac{200 \text{ cm}^2}{\pi}$

D) $400\pi^2 \text{ cm}^2$ E) $\frac{100 \text{ cm}^2}{\pi}$

Problema 10. ¿Cuántos enteros hay entre $\sqrt[3]{52}$ y $\sqrt{2017}$?

A) 39 B) 40 C) 41

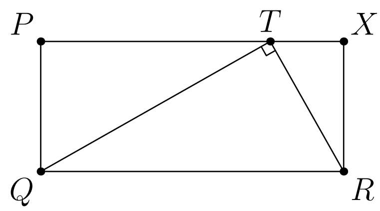
D) 42 E) 44

Problema 11. ¿Cuántos números distintos se pueden formar si se reordenan los dígitos de 2017?

A) 4 B) 16 C) 20

D) 24 E) 25

Problema 12. La figura muestra un rectángulo $PQRS$ y un punto T en el segmento PS de manera que QT es perpendicular a RT. La longitud de QT es 6 cm. La longitud de RT es 3 cm.



¿Cuál es el área del rectángulo $PQRS$?

A) 18 B) 12 C) 8

D) $6\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

Problema 13. Vicente tiene entre 50 y 80 años. Si se divide su edad para 8, el residuo da 2. Si se divide su edad para 7, el residuo da 3. ¿Cuántos años tiene Vicente?

A) 58 B) 66 C) 68

D) 71 E) 74

Problema 14. Si $A - 4 = B - 2 = C + 5 = D - 1$, ¿cuál de los números A, B, C, D es el mayor?

A) A B) B C) C

D) D E) No se puede determinar

Problema 15. ¿Cuántos números de tres dígitos $\overline{abc}$ ($a \neq 0$) cumplen que a es distinto de b y b es distinto de c?

A) 100 B) 500 C) 729

D) 810 E) 900

Problema 16. Daira tiene un álbum de 29 páginas. En cada página pega igual número de estampillas. Con 70 estampillas llenó 5 páginas. El álbum completo tendrá:

A) 145 estampillas B) 345 estampillas C) 350 estampillas

D) 406 estampillas E) 420 estampillas

Problema 17. ¿Cuántos ángulos de 30° están dibujados en un hexágono regular con todas sus diagonales trazadas?

A) 6 B) 12 C) 18

D) 20 E) 24

Problema 18. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen que $\frac{63}{n^2-1}$ es entero?

A) 2 B) 3 C) 5

D) 8 E) 12

Problema 19. El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de digitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias, pero formada de 8 dígitos. Por ejemplo: $(0,0,1,0,0,0,1,1)$. ¿Cuántos *bytes* diferentes existen que no tengan todos sus dígitos iguales?

A) 64 B) 128 C) 250

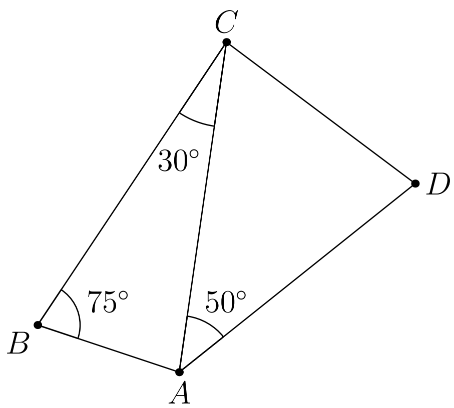
D) 254 E) 256

Problema 20. En un grupo de baile hay 38 niños y 29 niñas. Cada semana entran al grupo 3 niños y 4 niñas más. ¿En cuántas semanas habrá el mismo número de niños que de niñas?

A) 9 B) 10 C) 12

D) 18 E) 21

Problema 21. En la figura se muestra un cuadrilátero $ABCD$. Si $BC = AD$, ¿cuánto mide el ángulo ADC?



A) 50° B) 60° C) 65°

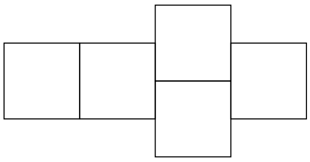
D) 75° E) 80°

Problema 22. Hallar la última cifra de la representación decimal finita del número $\frac{1}{5^{2017}}$.

A) 8 B) 6 C) 5

D) 4 E) 2

Problema 23. Con 3 colores: rojo, verde o azul, se quieren pintar las casillas de la figura de modo que 2 casillas vecinas sean siempre de distinto color.



¿De cuántas maneras puede hacerse?

A) 0 B) 8 C) 12

D) 24 E) 27

Problema 24. El producto $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = 12$. ¿Cuánto es $a + b$?

A) 17 B) 18 C) 33

D) 35 E) 47

Problema 25. Sean p, q y r tres primos cuya suma es 40. Si $p < q < r$, hallar el valor de r.

A) 7 B) 11 C) 23

D) 29 E) 31

1.1.3 NIVEL 3

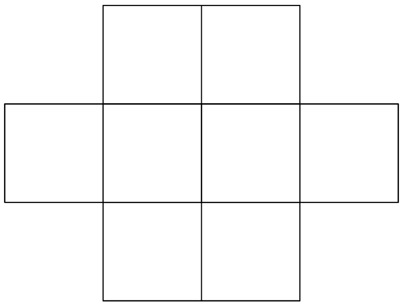
Problema 1. Andrea está preparando una torta. La receta dice que la torta debe ser horneada por 1 hora y 35 minutos. Andrea pone la torta en el horno a las 11:40 am. ¿A qué hora deberá retirarlo del horno?

A) 12:15 pm B) 12:40 pm C) 1:05 pm
D) 1:15 pm E) 2:15 pm

Problema 2. En la escuela 30 niños participaron en concursos. Si 15 de ellos participaron en una carrera y 20 de ellos participaron en saltos, ¿cuántos participaron en ambas competencias?

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

Problema 3. La figura que se muestra está formada por cuadrados iguales. Su perímetro es de 42 cm.



¿Cuál es su área?

A) 32 B) 42 C) 72
D) 108 E) 110

Problema 4. ¿Cuál es la cantidad de enteros entre 18200 y 23000 que son múltiplos de 256?

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 89

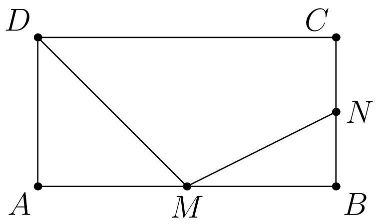
Problema 5. Emilio, Carlos, Gonzalo, Francisco y Mario han quedado en la puerta del cine con sus amigas, Carmen, Luisa, Teresa y Cristina. Al encontrarse, se saludan como es habitual: dos besos en la mejilla entre un chico y una chica. ¿Cuántos besos se dieron en total?

A) 8 B) 10 C) 18
D) 36 E) 40

Problema 6. En una competición de danza los jueces califican a los competidores con puntuaciones enteras entre 0 y 10. La media de las puntuaciones concedidas a un concursante es 5.625. ¿Cuál es el menor número de jueces para que esto sea posible?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 45

Problema 7. $ABCD$ es un rectángulo, $AB = 2BC$, M y N son puntos medios de los lados.



El área de $MNCD$ representa:

A) $\frac{5}{8} \times \text{Área}(ABCD)$
B) $\frac{8}{5} \times \text{Área}(ABCD)$
C) $\frac{1}{2} \times \text{Área}(ABCD)$
D) $2 \times \text{Área}(ABCD)$
E) $\frac{3}{5} \times \text{Área}(ABCD)$

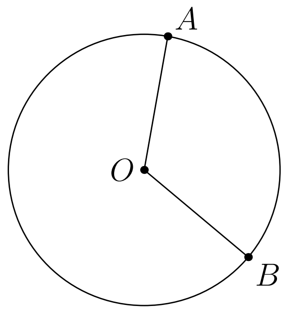
Problema 8. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se escriben todos los números de cinco cifras distintas que son múltiplos de 5. En total se escribieron:

A) 24 números
B) 48 números
C) 120 números
D) 240 números
E) 256 números

Problema 9. Carlos alquila su bicicleta a sus amigos a razón de 2 chocolatinas por 4 horas o 12 dulces por 3 horas. Miguel le da a Carlos una chocolatina y 4 dulces. ¿Cuánto tiempo podrá conducir la bicicleta?

A) 1 h y 30 min
B) 3 h
C) 12 h
D) 16 h y 30 min
E) 18 h

Problema 10. La circunferencia tiene centro O y radio $OA = 10$, $\angle BOA = 120°$.



El arco AB tiene una longitud de:

A) 10π
B) 20π
C) $\frac{10\pi}{3}$
D) $\frac{100\pi}{5}$
E) $\frac{20\pi}{3}$

Problema 11. Alicia viene al club todos los días; Benito, cada 2 días; Carmen cada 3 días; Daniel cada 4 días; Elena cada 5 días, Félix cada 6 días y Gaby cada 7 días. Hoy están todos en el club. ¿Cuántos días pasarán hasta la próxima vez que se encuentren todos en el club?

A) 7
B) 28
C) 420
D) 784
E) 5040

Problema 12. La suma de 26 enteros consecutivos es 871. ¿Cuál es el menor entero?

A) 20
B) 21
C) 22
D) 33
E) 34

Problema 13. De un grupo de 6 niños y 3 niñas se quiere formar un grupo de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántos grupos distintos se pueden formar?

A) 4 B) 15 C) 20

D) 40 E) 60

Problema 14. Se corta un cuadrado en 36 cuadrados más pequeños. Sólo uno de ellos tiene área mayor que 1 cm^2; los restantes tienen área 1 cm^2. La longitud del lado del cuadrado inicial es:

A) 17 B) 18 C) 35

D) 289 E) 324

Problema 15. Un rectángulo es dividido en 4 rectángulos pequeños. Las áreas de los rectángulos pequeños son 21, 35, 48, x, como indica la figura.

21	48
35	x

Encontrar x.

A) 15 B) 29 C) 40

D) 62 E) 80

Problema 16. Paula empezó con 5 galletas por cada 3 galletas que Adrián tenía. Después, Paula le dio 1 galleta a Adrián. Paula terminó con 3 galletas por cada 2 que Adrián tenía en el inicio. ¿Con cuántas galletas empezó Paula?

A) 6 B) 9 C) 10

D) 15 E) 25

Problema 17. Todos los números pares entre 1 y 99, excepto los que terminan en 0, se multiplican entre sí para dar como resultado el número R. ¿Cual es el dígito de las unidades de R?

A) 0 B) 2 C) 4

D) 6 E) 8

Problema 18. $ABCD$ es un cuadrado y CDE es un triángulo equilátero. Encontrar la suma de todos los posibles valores de $\angle BEC$.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 90° E) 120°

Problema 19. Algunas de las personas P, Q, R, S, T se saludan entre sí. P saluda a una sola persona, y Q también saluda a una sola persona. R, S, y T saludan, cada una, a dos personas. Se sabe que P saludó a T. ¿Qué saludo NO se produjo con seguridad?

A) T con S B) T con R C) Q con R

D) Q con T E) Q con S

Problema 20. La mamá de María compra una caja de terrones de azúcar. María se come la capa superior, que tiene 77 terrones; después se come la cara lateral, que consta de 55 terrones; y finalmente se come la cara frontal también. ¿Cuántos terrones quedan en la caja?

A) 280 B) 290 C) 300

D) 330 E) 385

Problema 21. Adrián y Tania participan en un juego de doce rondas. En cada ronda el ganador gana 5 puntos y el perdedor gana 3 puntos. El puntaje total de Tania es 44 puntos. ¿Cuántas rondas ganó Adrián?

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

Problema 22. En un cuadrado mágico, los números en cada columna, cada fila, y las dos diagonales suman la misma cantidad.

	10	5
8		4
7	2	

¿Cuál es el producto de los números que faltan?

A) 18 B) 24 C) 162

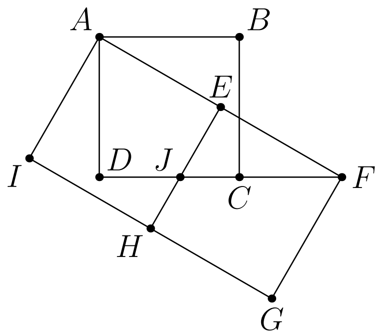
D) 210 E) 216

Problema 23. Un equipo puede obtener 1, 2 ó 3 puntos en cada partido. Si cierto equipo jugó contra los equipos: A, B, C y D, una vez contra cada uno, ¿de cuántas maneras pudo obtener dicho equipo 9 puntos?

A) 8 B) 10 C) 14

D) 16 E) 18

Problema 24. Los cuadrados $ABCD$, $AEHI$, $EFGH$ son congruentes. Los puntos D, J, C, F son colineales.



Encontrar $\angle EJD$.

A) 100° B) 105° C) 115°

D) 120° E) 135°

Problema 25. Se escriben en orden creciente los números enteros positivos que son iguales al producto de sus divisores positivos (distintos de ellos mismos). ¿Cuál es el sexto de esos números?

A) 15 B) 21 C) 22

D) 25 E) 26

1.1.4 NIVEL U

Problema 1. Calcular

$$\frac{21^3+22^3+\cdots+39^3}{21+22+\cdots+39}$$

.

Problema 2. Considerar la secuencia de números $24, 2534, 253534, 25353534, 2535353534, \cdots$. Si N es el primero número de la secuencia divisible para 99, hallar la cantidad de dígitos de N.

Problema 3. 500 personas están sentadas en fila. Una por una, empezando desde la izquierda, cada persona se levanta o se queda sentada. La primera persona se levanta con probabilidad $\frac{1}{2}$. Para cada $n > 1$, la n-ésima persona se levanta con probabilidad $\frac{S_n+1}{n+1}$, donde S_n es la cantidad de personas que se levantaron antes que dicha persona. ¿Cuál es el valor esperado de personas que estarán levantadas al final del proceso?

Problema 4. Hallar

$$\int_0^9 \int_0^9 \min\{x, y\} dx dy$$

Problema 5. Sea S el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que

$$\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 12 \\ 2y-x & \geq & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Hallar el máximo de la función $f(x, y) = 4(x-5)^2 + (y-5)^2 + 1$ en el conjunto S.

Problema 6. Una secuencia de reales positivos safistace que $a_0 = 2017$ y que

$$a_{n+1}^2 = 6a_n + 16 \text{ para todo entero } n \geq 0$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Problema 7. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ enteros positivos tales que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 100$. Hallar el máximo valor que puede tomar

$$\lim_{n\to\infty} (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{10}^n)^{\frac{1}{n}}$$

.

Problema 8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(1) = 2$ y

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}$$

Hallar $\lfloor f(\sqrt{401}) \rfloor$.

Problema 9. Sea G un grupo conformado por el conjunto de matrices de 3×3 triangulares superiores con entradas en la diagonal iguales a 1 con la operación de multiplicación. Sea z un elemento perteneciente al centro de G tal que la suma de todas sus entradas es igual a 400. Hallar el máximo valor que puede tomar una entrada de z.

Problema 10. Danielle recoge 6 manzanas de un árbol en el cual cada manzana tiene independientemente una probabilidad de $2/3$ de estar en buen estado. Danielle desea preparar un pie de manzana, para lo cual necesita al menos 5 manzanas en buen estado. Si la probabilidad de que Danielle pueda realizar el pie es la fracción irreducible p/q, hallar $p + q$.

Problema 11. Se dice que un punto en el plano es racional si ambas coordenadas son números racionales. ¿Cuál es el máximo número de puntos racionales en una circunferencia cuyo centro no es racional?

Problema 12. Sea S un conjunto convexo que interseca a ambas ramas de las hipérbolas $xy = 20$ y $xy = -5$. Hallar el menor valor que puede tener el área de S.

Problema 13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene valores propios iguales a $\frac{a+b+10c}{2}$ y $\frac{a+b-10c}{2}$. Hallar $\frac{(a-b)^2}{c^2}$.

Problema 14. Sean A, B matrices reales de 3×3 tales que $\det(AB) = 125000$, $\det(2A) = 1000$, $\text{traza}(ABA^{-1}) = 30$. Si se sabe que los eigenvalores de B son reales positivos, hallar el máximo valor propio de B.

Problema 15. Se define la matriz A de 5×5 tal que sus entradas cumplen que $a_{ij} = \frac{1}{\min\{i,j\}}$ para todo $1 \leq i, j \leq 5$. Hallar

$$\frac{1}{10 \det A}$$

.

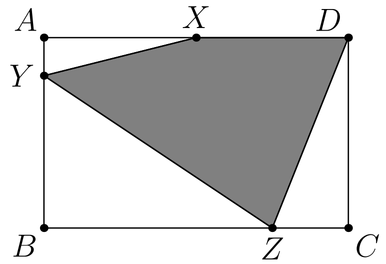
1.2 SEGUNDA FASE

1.2.1 NIVEL 1

Problema 1. Hallar la cantidad de dígitos por los que puede sustituirse u para que el número $\overline{35u}$ sea divisible por 6.

Problema 2. Se tienen 11 naranjas y 13 manzanas. ¿Cuántas frutas se deben comer como mínimo para que el número de manzanas sea el doble del número de naranjas?

Problema 3. Sea $ABCD$ un rectángulo con $AB = 5$ y $BC = 8$. X es un punto en el segmento AD tal que $AX = 4$, Y es un punto en el segmento AB tal que $BY = 4$ y Z es un punto en el segmento BC tal que $BZ = 6$.



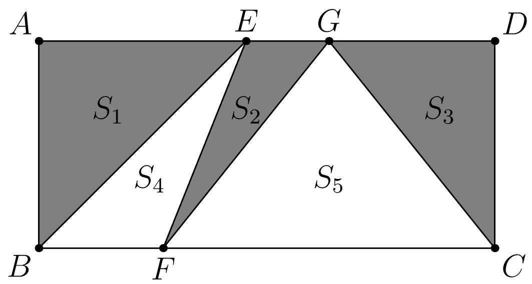
Hallar el área del cuadrilatero $XYZD$.

Problema 4. Daniel escribió en su cuaderno todas las formas de escribir 5 enteros positivos distintos, ordenados ascendentemente, cuya suma es 20. Hallar el número de formas en la lista de Daniel.

Problema 5. ¿Por cuál cifra debe sustituirse x para que el número $\overline{502x7}$ deje residuo 6 al ser dividido por 9?

Problema 6. Dos equipos de fútbol, a modo de entrenamiento, pactaron en jugar 8 partidos durante el verano. En cada partido, el equipo ganador recibe 3 puntos y el perdedor 0 puntos. En caso de empate cada equipo recibe 1 punto. Luego de los 8 partidos los dos equipos suman 22 puntos. ¿Cuántos partidos terminaron en empate?

Problema 7. Sea $ABCD$ un rectángulo con $AB = 5$ y $BC = 11$. Sean E y G puntos en AD tal que $AE = 5$ y $EG = 2$. Sea F un punto en BC tal que $BF = 3$. Hallar el valor de $S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5$ si S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 son las áreas que se indican en la figura.

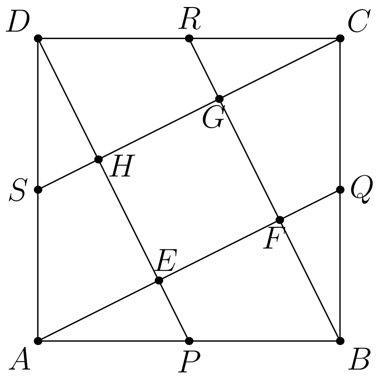


Problema 8. Hay 16 personas de pie en una fila. La primera persona camina y se ubica al final de la fila y la segunda persona se sienta, de tal forma que la persona que estaba tercera previamente ahora es la primera persona en pie de la fila. Luego dicha persona camina y se ubica al final de la fila y la que está detrás suyo se sienta y así sucesivamente. Este proceso se repite hasta que solamente una persona quede en pie. ¿Cuál era la posición inicial de ésta persona?

Problema 9. Don José tiene en su corral patos y conejos. Al contarlos se dio cuenta de que la cantidad de conejos menos la cantidad de patos es igual a la mitad del total de animales en su corral. ¿Cuál es la razón entre el número de conejos y el número de patos?

Problema 10. ¿Cuántas parejas de dígitos (a, b) satisfacen que el número de tres dígitos $\overline{b4a}$ es múltiplo de 6?

Problema 11. Sea $ABCD$ un cuadrado con P, Q, R y S los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente.



Hallar el área del cuadrado $ABCD$ si el área del cuadrado $EFGH$ es 25.

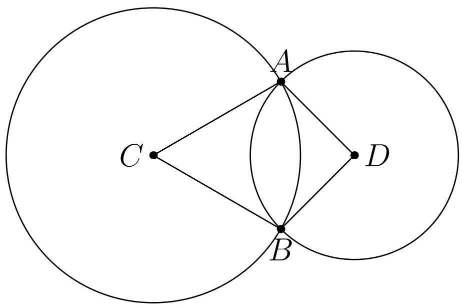
Problema 12. Se consideran todos los números naturales que usan exclusivamente los dígitos 0, 1, 2, estos números son ordenados de menor a mayor para formar una lista infinita:

$$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12, \ldots,\ 2010,\ 2011,\ 2012,\ a,\ b,\ c,\ d, \ldots$$

Calcular el valor de $d - a$.

Problema 13. Se tiene una cuadrícula de 10×10 y se denotan los centros de cada cuadradito unitario. ¿Cuántos cuadrados con lados paralelos a la cuadrícula se pueden formar uniendo cuatro de dichos centros?

Problema 14. Las circunferencias de la figura tienen sus centros en C y en D, se intersectan en los puntos A y B. Si $\angle ACB = 60°$, $\angle ADB = 90°$, y $DA = 5\sqrt{2}$, ¿cuánto mide CA?



Problema 15. Dados a, b, c dígitos distintos tales que $\overline{ba}^2 = \overline{cb}^3$, calcular el valor de $a + b + c$.

1.2.2 NIVEL 2

Problema 1. Véase el problema 5 del nivel 1.

Problema 2. Véase el problema 8 del nivel 1.

Problema 3. Dados 4 números a, b, c y d se consideran todos los promedios por parejas de estos números y obtenemos 2, 4, 5, 8, 9 y 11. ¿Cuál es la suma de estos cuatro números?

Problema 4. Véase el problema 7 del nivel 1.

Problema 5. Si $\overline{a679b}$ es un número de cinco dígitos que es divisible por 72, determinar $a + b$

Problema 6. Véase el problema 12 del nivel 1.

Problema 7. Véase el problema 11 del nivel 1.

Problema 8. Véase el problema 13 del nivel 1.

Problema 9. Determinar cuántos números primos p cumplen la condición $8! + 1 < p < 8! + 9$

Problema 10. Dada la igualdad $16^n + 16^n + 16^n = 6 \times 2^{2011}$, encontrar el valor de $\sqrt[3]{n + 9}$.

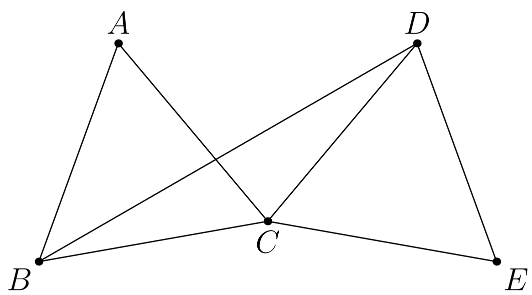
Problema 11. Véase el problema 14 del nivel 1.

Problema 12. Si a, b, c, d son enteros positivos tales que $2a < b$, $3b < c$, y $4c < d$, encontrar el menor valor posible de d.

Problema 13. Encontrar la cantidad de divisores positivos de $242^4 \times 26^3$.

Problema 14. ¿Cuántos enteros positivos menores a 10^9 tienen como producto de sus dígitos 49?

Problema 15. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros iguales.



Si el ángulo ACD mide $80°$, ¿cuánto mide el ángulo ABD?

1.2.3 NIVEL 3

Problema 1. Véase el problema 3 del nivel 2.

Problema 2. Véase el problema 7 del nivel 1.

Problema 3. Véase el problema 5 del nivel 2.

Problema 4. Ayer Juan fue a la tienda y compró 4 frutas distintas. Juan llevó 3 fundas idénticas, y se las entregó al cajero. ¿De cuántas maneras el cajero puede colocar las frutas en las fundas, considerando que puede dejar fundas vacías?

Problema 5. Véase el problema 12 del nivel 2.

Problema 6. Encontrar la cantidad de enteros positivos n, tales que, $n + 1$ divide a $n^2 + 3$.

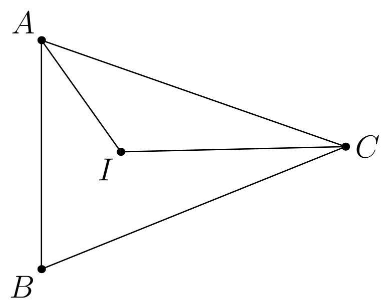
Problema 7. Véase el problema 14 del nivel 1.

Problema 8. Véase el problema 14 del nivel 2.

Problema 9. Un examen tiene 20 preguntas. Se califica con 7 puntos cada respuesta correcta, con -2 puntos cada respuesta incorrecta y con 0 puntos si la pregunta se deja sin contestar. Andrés obtuvo 87 de calificación. ¿Cuántas preguntas dejó sin responder?

Problema 10. ¿Cuál es la suma de los dígitos del menor entero positivo con exactamente 15 divisores?

Problema 11. En el triángulo ABC el $\angle ABC = 68°$. Sea I es el incentro del triángulo ABC.



Hallar el valor del $\angle AIC$.

Problema 12. Sebastián le da a Anthony un número entero entre 180 y 240, y le pregunta si ese número es primo o compuesto, inmediatamente Anthony divide ese número entre 2, 3, 5, 7, 11, y todos los residuos que obtiene son distintos de 0, entonces le responde a Sebastián: "el número es primo", sin embargo Sebastián le dice que su respuesta es incorrecta. ¿Qué número le dio Sebastián a Anthony?

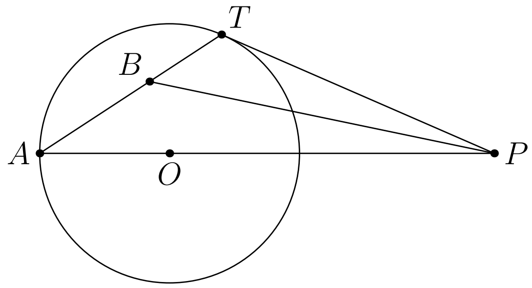
Problema 13. Si a y b son números reales diferentes tales que:

$$a^2 - 1 = b$$
$$b^2 - 1 = a,$$

calcula el valor de $-(a^3 + b^3)$.

Problema 14. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ existen tal que la suma de sus elementos sea mayor a 27?

Problema 15. En la figura, P, O y A son colineales, PT es tangente al círculo con centro O y PB biseca al ángulo TPA.



¿Cuánto mide el ángulo TBP?

1.3 TERCERA FASE

1.3.1 NIVEL 1

Problema 1. Un tonel lleno de vino tiene un peso de 265 kg, pero si el mismo tonel está hasta la mitad de su capacidad pesa 160 kg. ¿Cuánto pesa dicho tonel cuando está vacío?

Problema 2. Se denomina como *binaria* a una lista de unos y ceros. ¿Cuántas listas binarias de 4 números existen tales que contengan al menos dos unos?

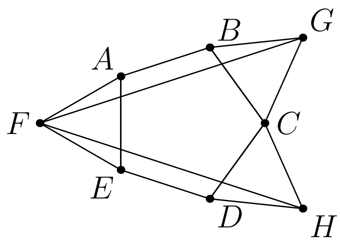
Problema 3. 9 amigos están tratando de compartir una pizza que llegó dividida en 10 pedazos iguales. Ya que no hay manera de dividir en partes iguales los 10 pedazos entre 9 personas sin que sobre algún pedazo, entonces toman la decisión de cortar todos y cada uno de los pedazos nuevamente en 10 pedazos iguales, obteniendo 100 pedazos en total, pero aún no pueden dividir esta cantidad en partes iguales para los 9 amigos sin que sobre algún pedazo. Si continúan con este método, cortando todos y cada uno de los pedazos en 10 pedazos iguales, ¿en algún momento podrán compartir la pizza entre los 9 amigos, en partes iguales y sin que sobre algún pedazo?

Problema 4. El área de un hexágono regular es $N\,\text{cm}^2$ y su perímetro es $N\,\text{cm}$. Hallar N.

Problema 5. Se define para cada entero positivo k el número $k!$ como el producto de todos los números naturales menores o iguales a k, por ejemplo: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Determinar el valor de n tal que $n! = 3! \cdot 5! \cdot 7!$

Problema 6. Hallar la cantidad de maneras distintas de colocar 5 reinas en un tablero de ajedrez de 5×5 de tal manera que no hayan dos que se atacan mutuamente.
Nota: Dos reinas se atacan mutuamente si están en la misma fila, columna o diagonal.

Problema 7. Si $ABCDE$, BGC, CHD, AEF son polígonos regulares en la siguiente figura



Hallar el valor de $\angle HFG$.

1.3.2 NIVEL 2

Problema 1. ¿Existe algún entero positivo X tal que X, $X+1$ y $X+2$ son todos números primos?

Problema 2. ¿Cuántos números naturales de tres dígitos existen tales que el producto de sus dígitos es un número par?

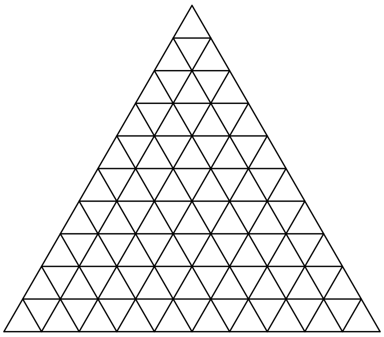
Problema 3. Las longitudes de un triángulo son 3, 4 y 5. Encontrar la longitud de su altura más pequeña.

Problema 4. Un número natural tiene todos sus dígitos distintos y el producto de ellos es n. ¿Cuántos elementos del conjunto $\{126, 128, 130, 132, 135\}$ son posibles valores de n?

Problema 5. La suma de todos los números naturales que pueden formarse al ordenar los dígitos a, b, c es 1554. Si se tiene que a, b y c son distintos entre sí y distintos de 0, ¿cuál es el mayor de estos tres dígitos?

Problema 6. Un hexágono tiene lados de longitud 2, 3, 4, 2, 3, 4, en ese orden. Si se conoce que todos los ángulos internos del hexágono son iguales, encontrar el área del hexágono.

Problema 7. Un triángulo equilátero de lado 10 se divide en 100 triángulos equiláteros de lado 1 como se muestra en la figura.



Hallar la cantidad total de triángulos equiláteros que se puede ver en dicha figura.

1.3.3 NIVEL 3

Problema 1. Si al cuadrado de la edad de Diego se le resta 224 veces el cuadrado de su recíproco se obtiene $\frac{121}{2}$, ¿cuál será la edad de Diego dentro de cinco años?

Nota: El recíproco es también llamado inverso multiplicativo, por ejemplo: el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$.

Problema 2. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la suma de todos los divisores positivos del número 2^{2017}?

Problema 3. ¿Cuántos números naturales de tres dígitos existen tales que el producto de sus dígitos es un número par?

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrado, E y F los puntos medios de AB y AD respectivamente, y P la intersección de CF y DE. Determinar $\frac{CF}{EP}$.

Problema 5. Si los números reales no nulos a, b, c, d cumplen

$$a+b+c+d = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd} = 0$$

Hallar $(cd-ab)(c+d)$.

Problema 6. En el club "Les Fleurs", cada socio debe elegir 4 actividades de un total de 6 disponibles, de tal manera que no existan 2 socios que elijan las mismas 4 actividades ni tampoco existan 2 socios que compartan exactamente 2 actividades. ¿Cuántos socios como máximo pueden tener el club "Les Fleurs"?

Problema 7. En un triángulo ABC, sea M el punto medio de AC. Si $BC = \frac{2}{3}\cdot MC$ y $\angle BMC = 2\cdot\angle ABM$, determinar $\frac{AM}{AB}$.

1.4 FASE FINAL

1.4.1 NIVEL 1

Día 1

Problema 1. En cierto año N, el día 300 es un martes, y en el año $N+1$, el día 200 es martes. ¿Cuál de los dos años es bisiesto?

Problema 2. El juego del *mundialito* entre 3 personas se juega de la siguiente manera: los dos jugadores en cancha tratan de hacerle gol al portero. El jugador que marque un gol se convierte en el portero para el siguiente partido y el jugador que era portero pasa a ser jugador en cancha. Andrés, Beto y Cristina juegan de esta manera varios partidos. Al terminar todos los partidos, le cuentan a su profesor que Andrés estuvo 12 veces en cancha, Beto estuvo 21 veces en cancha y Cristina estuvo 8 veces en la portería. Dada esta información, ¿puede el profesor saber quién hizo el sexto gol?

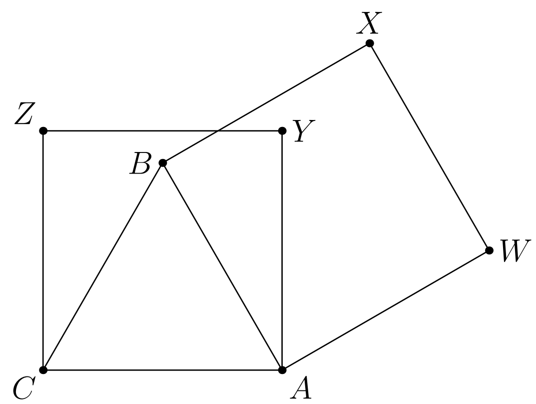
Problema 3. En el reino de *Frutilandia* existe un árbol mágico que posee 2017 manzanas y 2018 tomates. Todo los días un niño sube en el árbol y come dos frutas. Cuando él come dos frutas iguales, nace un tomate en el árbol; cuando él come dos frutas diferentes, nace una manzana. Después de muchos días solo queda una fruta en el árbol. ¿Qué fruta quedó?

Día 2

Problema 4. El producto de los dígitos de un número de 3 dígitos es 126 y la suma de sus dos últimos dígitos es 11. ¿Cuál es la cifra de las centenas de dicho número?

Problema 5. En Florencia las placas de las motos consisten de tres letras. La primera letra debe estar en el conjunto $\{F, L, O, R, E, N, C, I, A\}$, la segunda letra en el conjunto $\{I, M, O\}$, y la tercera letra en el conjunto $\{E, G, M, O\}$. Cierto dia, se decidió aumentar el número de placas usando dos nuevas letras J y K. El intendente de transportes ordenó que las nuevas letras fuesen puestas en conjuntos diferentes. Determinar con cuál opción podemos obtener el mayor número de placas.

Problema 6. El diagrama muestra un triángulo equilátero ABC y dos cuadrados $AWXB$ y $AYZC$. Demostrar que el triángulo AXZ es equilátero.



1.4.2 NIVEL 2

Día 1

Problema 1. Cuenta una antigua leyenda inca que entre las montañas habita un monstruo que cuando se despierta, se come a todos los que leyeron este problema. Luego de semejante faena, el monstruo regresa a las montañas y se duerme por una cantidad de años igual a la suma de sus dígitos del año en el que se despertó por última vez. El monstruo se despertó por primera vez en el año 234.

a) ¿Se habrá despertado el monstruo entre los años 2005 y 2015?

b) ¿Estaremos a salvo dentro de los siguientes 10 años?

Problema 2. Encontrar todas las parejas de números reales x, y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 10 \\ 3 + y = \frac{10}{x} \end{cases}$$

Problema 3. Dado un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$. Sean O el circuncentro de ABC, D el punto medio de AB y E el baricentro de ACD. Demostrar que $CD \perp EO$.

Día 2

Problema 4. Indicar si es posible escribir los enteros $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ en los vértices de un octágono regular tal que la suma de los números de cualesquiera 3 vértices consecutivos es mayor que:

a) 11.

b) 13.

Problema 5. Dos enteros positivos son coprimos si su máximo común divisor es 1. Sea C el conjutno de todos los divisores del numero 8775 que son mayores que 1. Un conjunto de k enteros positivos consecutivos cumple que cada uno de ellos es coprimo con algun elemento de C. Determinar el mayor valor posible de k.

Problema 6. Hallar todos los primos p tales que $p^2 - p + 1$ es un cubo perfecto.

1.4.3 NIVEL 3

Día 1

Problema 1. Determinar qué día de la semana fue el día D: el 6 de junio de 1944.
Nota: Los años bisiestos son aquellos que son múltiplos de 4 y no terminan en 00 o que son múltiplos de 400, por ejemplo 1812, 1816, 1820, 1600, 2000, pero no son bisiestos 1800, 1810, 2100.
Dar la respuesta sin ninguna justificación matemática, no otorgará puntos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AC = 18$ y D es el punto en el segmento AC tal que $AD = 5$. Se trazan perpendiculares desde D hasta AB y BC las cuales tienen longitud 4 y 5 respectivamente. Encontrar el área del triángulo ABC.

Problema 3. Adrián tiene $2n$ papeles enumerados del 1 al $2n$. Él se deshace de n papeles que están enumerados consecutivamente. La suma de los números de los papeles restantes es 1615. Encontrar todos los valores posibles de n.

Día 2

Problema 4. Sebastián, la hormiga viajera, camina encima de algunos tableros cuadrados. Él solo camina horizontal o verticalmente a través de las casillas de los tableros y no pasa por la misma casilla dos veces. En un tablero de 7×7, ¿en cuáles casillas puede empezar Sebastián su viaje de tal manera que pueda pasar por todas las casillas del tablero?

Problema 5. Sean las secuencias (x_n) y (y_n) definidas por $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ para $n = 0, 1, ...$ y $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$ para $n = 0, 1, ...$, respectivamente. Demostrar que para todo $n > 0$, y_n es el cuadrado de un entero impar.

Problema 6. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con lados no paralelos y tangentes a una circunferencia Γ en los puntos medios P, Q, R de los lados AB, CD, EF respectivamente. Γ es tangente a BC, DE y FA en los puntos X, Y, Z respectivamente. La recta AB corta a las rectas EF y CD en los puntos M y N respectivamente. Las rectas MZ y NX se cortan en el punto K. Sea r la recta que une al centro de Γ y al punto K. Demostrar que la intersección de PY y QZ pertenece a la recta r.

1.4.4 NIVEL U

Día 1

Problema 1. Sea c un real positivo. La recta $y = c$ interseca a la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante del plano cartesiano en exactamente dos puntos con abscisas $x_1 < x_2$. Se definen A_1 como la región comprendida entre las curvas $y = c$, $y = 2x - 3x^3$, $x = 0$, $x = x_1$, y A_2 como la región comprendida entre las curvas $y = c$, $y = 2x - 3x^3$, $x = x_1$, $x = x_2$. Hallar el valor de c tal que las regiones A_1 y A_2 tengan igual área.

Problema 2. Sea A, B, C puntos del plano cartesiano. $d(A, B)$ denota la distancia de los puntos A y B, y $a(X)$ denota el área de la figura X.

a) Demostrar que $d(A, B)^2 + d(B, C)^2 \geq 4 \cdot a(ABC)$ y hallar los casos de igualdad.

b) Si se sabe que los puntos A, B, C tienen coordenadas enteras y cumplen

$$(d(A, B) + d(B, C))^2 < 8 \cdot a(ABC) + 1$$

Demostrar que A, B, C son 3 vértices de un cuadrado.

Problema 3. Sean m, n enteros positivos tales que $n > m > 1$ y α, β reales positivos tales que $\alpha + \beta < 1$. Se definen $A(\alpha, n)$ como una matriz cuadrada de $n \times n$ con entradas en la diagonal iguales a 1 y fuera de la diagonal iguales a $1 - \alpha$, y $B(\beta, m, n)$ como una matriz rectangular de $m \times n$ con todas sus entradas iguales a β. Se define la matriz R por bloques de la siguiente forma

$$R = \begin{bmatrix} A(\alpha, n) & B(\beta, n, m) \\ B(\beta, m, n) & A(1 - \beta, m) \end{bmatrix}$$

Se sabe que $Rv = \lambda v$ donde v es el único vector que tiene todas sus entradas positivas y su máxima entrada es igual a 1. Sea δ la mínima entrada del vector v.

a) Hallar λ y δ en función de m, n, α, β.

b) Hallar

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} \frac{\delta}{\beta} \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha,\beta \to 0} \lambda$$

Nota: Por ejemplo, la matriz identidad de 3×3 es igual a $A(1, 3)$ y la matriz de 3×3 compuesta sólo por unos es igual $A(0, 3) = B(1, 3, 3)$.

Día 2

Problema 4. Se definen las tres secuencias $s_0 = m_0 = p_0 = \sqrt{2}$ y para $n \geq 1$:

$$s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}}$$

$$m_n = \sqrt{2m_{n-1}}$$

$$p_n = \left(\sqrt{2}\right)^{p_{n-1}}$$

a) Demostrar que las tres secuencias s_n, m_n, p_n convergen.

b) Demostrar que las tres secuencias s_n, m_n, p_n tienen el mismo límite.

Problema 5. Daniel escoge N puntos en R^m con $n, m \geq 1$ y quiere particionarlos de cierta manera con el objetivo de ver qué tan similares son. Su compañera Andrea le propone lo siguiente: Primero, Andrea escoge K puntos en R^m (no necesariamente de entre los N de Daniel) al azar a los que llama *centros*. En cada paso, Andrea agrupa todos los puntos junto a su centro más cercano (bajo la distancia euclidiana) en una partición y calcula nuevamente cada centro como el baricentro de todos los puntos en cada una de las K particiones. Daniel se da cuenta que mediante este proceso los centros y las particiones pueden cambiar en cada paso y le preocupa que el proceso continúe indefinidamente. Demostrar que Daniel está equivocado, es decir, que el proceso que Andrea propone llegará a una cierta partición, la cual no cambiará de ahí en adelante en el transcurso del proceso.
Nota: Las distancia euclidiana entre dos puntos es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias en coordenadas de ambos puntos. El baricentro de un conjunto de puntos tiene por coordenadas el promedio de las respectivas coordenadas de los puntos.

Problema 6. Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ los vértices de un polígono convexo que tiene al origen en su interior. Demostrar que existen reales positivos x, y tales que

$$(a_1, b_1)x^{a_1}y^{b_1} + (a_2, b_2)x^{a_2}y^{b_2} + \ldots + (a_n, b_n)x^{a_n}y^{b_n} = (0, 0)$$

2 SOLUCIONES

2.1 PRIMERA FASE

2.1.1 NIVEL 1

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	C	6	B	11	C	16	D	21	A
2	C	7	B	12	C	17	A	22	B
3	C	8	B	13	A	18	C	23	A
4	D	9	E	14	D	19	C	24	C
5	D	10	A	15	B	20	A	25	B

Solución del problema 1: El primer paso es sumar los términos que se encuentran dentro de la raíz: $2+0+1+7+n = 10+n$. Luego, como n es un número entero positivo, $10+n$ es un número mayor o igual que 11. Tomando en cuenta que para que la raíz de un número sea un entero, lo que está dentro de la raíz debe de ser un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más próximo a 11 es 16 por lo que $10+n = 16$. Luego de despejar a n en la ecuación obtenemos $n = 6$. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 2: Por lo que dice el enunciado sabemos que: Adrián no es el más alto ya que es más bajo que María, Anthony no es el más alto ya que Adrián lo supera en altura, Ana no es la más alta al ser más pequeña que Adrián. Así mismo, Andrea es más baja que Ana. Al descartar estas opciones tenemos a María como la persona más alta del grupo. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 3: Sean a y b los dígitos que escribió al inicio y final, entonces

$$\begin{aligned} \overline{ab} + 19 &= 72 \\ \overline{ab} &= 72 - 19 \\ \overline{ab} &= 53 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 4: Por dato del problema tenemos que $AB = 24$, entonces

$$\begin{aligned} AP &= \frac{1}{4}AB \\ AP &= \frac{1}{4}24 \\ AP &= 6cm \end{aligned}$$

Como $AP + PB = AB$, entonces

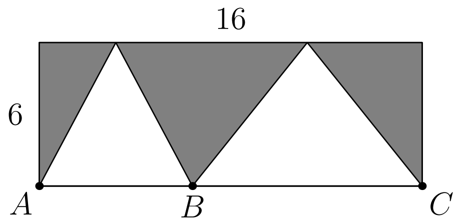
$$\begin{aligned} PB &= AB - AP \\ PB &= 24 - 6 \\ PB &= 18cm \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 5: Sean x e y el costo de una paleta y una galleta, respectivamente. Por datos del problema tenemos que $3x = 1.5$ y $2y = 2.4$, de donde $x = 0.5$ e $y = 1.2$, por lo que el costo de una paleta y una galleta es igual a $x + y = 1.7$. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 6: Primero calculamos la cantidad de números que hay entre 122 y 188. Esto se hace mediante la siguiente resta: $188 - 122 = 66$. Por lo que hay 66 números del 123 al 188. Como los números impares van de dos en dos dividimos para dos el número 66: $66 \div 2 = 33$. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 7: Sean A, B y C puntos como muestra la figura.

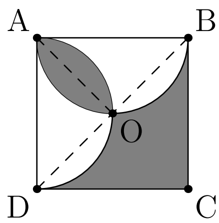


Sea $AB = x$, entonces $BC = 16 - x$. De izquierda a derecha, el área de la primera región sin sombrear es $\frac{6 \cdot AB}{2} = 3x$. El área de la siguiente región sin sombrear es $\frac{6 \cdot BC}{2} = 3(16 - x)$. Entonces el área de la región sin sombrear es $3x + 3(16 - x) = 48$.
El área de la región sombreada es $6 \cdot 16 - 48 = 48$. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 8: Contamos primero las baldosas que conforman los dos lados de largo del piso rectagular: $9 \cdot 2 = 18$. Luego, contamos las baldosas que conforman el ancho, notemos que las baldosas esquineras ya fueron contadas en el cálculo anterior por lo que al no contarlas tenemos: $3 \cdot 2 = 6$. Entonces el total sería $18 + 6 = 24$. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 9: Sea x el lado del cuadrado.
Por dato el perímetro del rectángulo será: $2(4 + 8) = 2(12) = 24$. Como el perímetro del cuadrado es igual al perímetro del rectángulo, el perímetro del cuadrado es 24.
Se sabe que el perímetro del cuadrado es $4 \cdot x$, entonces $24 = 4 \cdot x$, por lo que $x = 6$. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 10: Sea O el centro del cuadrado. Al trazar AO, BO y DO se puede ver que el área sombreada en el triángulo ΔBAD es igual al área sin sombrear del triángulo ΔBCD. Por lo que el área sombreada sería igual al área sin sombrear, entonces el área sombreada es la mitad del área del cuadrado $ABCD$.



Al ser $(ABCD) = 2^2$, el área sombreada sería $\frac{2^2}{2} = 2$. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 11: Al elevar $9 < \sqrt{n} < 10$ al cuadrado, tenemos que $81 < n < 100$. Entonces cualquier número del 82 al 99 cumplen. Son $99 - 81 = 18$ números. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 12: Se sabe que la moneda está a la izquierda del guisante y el guisante está a la derecha de la caja roja por lo que la moneda estaría en la caja roja. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 13: No existen polígonos de dos lados, por lo cual es imposible que la respuesta sea 2. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 14: Si por cada bolsillo, hay tres ratones y por cada ratón hay cinco ratoncitos, en cada bolsillo habrá $3 \cdot 5 = 15$ ratoncillos. Como hay 585 bolsillos, habrá $585 \cdot 15 = 8775$ ratoncitos. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 15: Para la primera cifra del número, la única posibilidad es que sea 1, ya que si es 0 el número no será de 5 cifras. Las otras 4 cifras tienen dos posibilidades cada una, pueden ser 0 o 1. Utilizando el principio fundamental del conteo tenemos que: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ es la cantidad total de posibles números. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 16: Para calcular la mínima cantidad de días hasta que se encuentren se debe de calcular el mínimo común múltiplo entre los números: $3, 21, 15, 8$ y 11 que es 9240. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 17: Por dato del problema, cada pizza tiene dos aceitunas, entonces hay $2(8) = 16$ aceitunas, más la aceituna del centro, serían 17 aceitunas en una pizza. Como hay tres pizzas, hay un total de $3(17) = 51$ aceitunas. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 18: Sabemos que cada persona dió un apretón de manos a los otros 9 invitados de la fiesta. Si se suman todos los apretones de manos que dió cada persona da un total de: $9 \cdot 10 = 90$. Sin embargo, se está contando dos veces cada apretón de manos ya que se lo cuenta por parte de el que lo dió y el que lo recibió, por esto se debe de dividir para 2: $90 \div 2 = 45$. Esto nos da un total de 45 apretones de manos. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 19: Se toma en cuenta la opción C y el hecho de que los ángulos internos de un triángulo deben de sumar $180°$. Si los dos ángulos dados por el enunciado son $50°$ y $80°$ entonces al sumarse con el tercer ángulo del triángulo deben de sumar $180°$. Sea el tercer ángulo del triángulo x. Se tiene $50° + 80° + x = 180°$, despejando x se obtiene que $x = 50°$. Como hay dos ángulos del iguales a $50°$, el triángulo es isósceles. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 20: Sea el número dado de la forma $\overline{ab}$ con dos dígitos a y b. La ecuación del enunciado se expresaría de la siguiente manera

$$\overline{ab} = 3(a+b) - 5$$

Por descomposición canónica se sabe que $\overline{ab} = 10a + b$. Entonces la ecuación se transforma a:

$$\begin{aligned} 10a + b =& 3(a+b) - 5 \\ 10a + b =& 3a + 3b - 5 \\ 7a =& 2b - 5 \end{aligned}$$

Sabemos que a y b son dígitos de un número por lo que a está entre 1 y 9 y también b está entre 0 y 9. Por esto, el máximo número que puede tomar $2b - 5$ es $2 \cdot 9 - 5 = 13$. Como $7a = 2b - 5$ el máximo valor que puede tomar $7a$ también es 13. Por esto, a debe de ser 1. Despejando el valor de b en la ecuación:

$$7 = 2b - 5 \Rightarrow b = 6$$

Con lo que la respuesta es 16, opción A.

Solución del problema 21: Las ecuaciones quedarían expresadas de la siguiente manera:

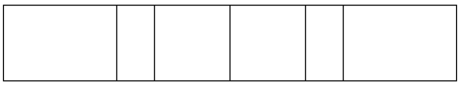
- $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15} = \frac{176}{120}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{64}{120}$
- $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{22}{8} = \frac{330}{120}$
- $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{10}{12} = \frac{100}{120}$
- $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} = \frac{225}{120}$

Las fracciones quedán ordenadas (de mayor a menor) de la siguiente forma:

$$\frac{320}{120}, \frac{225}{120}, \frac{176}{120}, \frac{100}{120}, \frac{64}{120}$$

Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 22: Se sabe que la tira de papel será cortada en 6 longitudes. De izquierda a derecha, la primera es $\frac{1}{4}$, la siguiente sería $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. La tercera será $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Las siguientes tres longitudes son iguales a las primeras tres por simetría con la recta que corta a la mitad a la tira de papel. Con lo que la respuesta es B.



Solución del problema 23: Se sabe que la fórmula que calcula el área del círculo es $\pi \cdot r^2$ en donde r es el radio de círculo. Entonces $36\pi = r^2 \cdot \pi$. Despejando r como el radio del círculo dado se tiene que $r = 6$. Luego, se trazan desde el centro dos radios hacia los dos extremos de la cuerda se obtiene un triángulo isósceles de lados 6, 6 y 8. Para calcular la menor distancia que puede caminar Adrián se debe de calcular la medida de la altura de este triángulo que parte desde el centro hasta la cuerda.

Sea x la medida de esa altura. Como es un triángulo isósceles se sabe que la altura que parte del centro divide a la cuerda en dos partes iguales de longitud 4 cada una. Por lo que el triángulo inicial queda dividido en dos triángulos rectángulos de lados $6, 4$ y x. Usando pitágoras se tiene que:

$$x = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$$

Por lo que la altura medirá $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 24: El área del cuadrado tiene que ser igual al área total de los n cuadrados de lado n, para poder ser dividido como indica el problema.

Se sabe que el área del cuadrado es l^2, donde l es una de sus lados. Entonces el área del cuadrado de lado 27 es 27^2, se conoce que $27 = 3^3$, entonces $27^2 = (3^3)^2 = (3^2)^3$.
Además, el área de un cuadrado de lado n es n^2, como son n cuadrados, el área total sería $n \times n^2 = n^3$. Como $n^3 = 9^3$, sacamos raíz cúbica a ambas partes: $\sqrt[3]{n^3} = \sqrt[3]{9^3}$, entonces $n = 9$. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 25: Sea m y n la cantidad de billetes de 5 y 2, respectivamente. Por dato, $5m + 2n = 90$, entonces despejando $5m$ tenemos que $5m = 2(45 - m)$, por lo que m es par. Si $m > 18$, $5m > 5 \cdot 18 = 90$, lo que es una contradicción. Por lo que $m \leq 18$. Entonces m sería $0, 2, \ldots, 18$. n depende de m, por lo que para cada m, hay un n que cumple. Entonces hay 10 formas de pagar. Con lo que la respuesta es B.

2.1.2 NIVEL 2

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	D	6	B	11	D	16	D	21	C
2	A	7	B	12	A	17	E	22	E
3	E	8	E	13	B	18	A	23	C
4	C	9	A	14	A	19	D	24	E
5	C	10	C	15	C	20	A	25	E

Solución del problema 1: Por dato, Joyce tiene la misma cantidad de billetes de \$ 10 y de \$ 2. Como tiene 11 billetes de \$ 10, tiene 11 billetes de \$ 2. En total tendría $11 \cdot 2 + 11 \cdot 10 = 22 + 110 = 132$. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 2: El máximo valor que puede tomar la cifra de las centenas del número resultante es 9, por lo cual se busca eliminar al 4 para obtener un numero de tres cifras que empiece con 9. Luego, se busca obtener el máximo número que se ubique en las decenas, al borrar el 2 y el 1 obtenemos el 5. Por último, se busca obtener el máximo valor para la cifra de las unidades al borrar el 0 y obtener el 8. Con esto, el número de tres cifras restante es 958 al haber borrado las cifras $4, 2, 1, 0$. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 3: Se sabe que el la raíz de 36 es divisor de 36, por lo que también es divisor de cualquier múltiplo de 36. Como el cuadrado de 36 es múltiplo de 36, también será múltiplo de la raíz de 36, por lo que el residuo de la división es 0. Con lo que la respuesta es E.

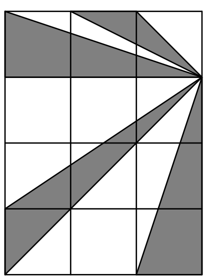
Solución del problema 4: Sea x el lado del cuadrado, se conoce que el área del cuadrado es x^2. La diagonal corta al cuadrado en dos triángulos rectángulos de lados $x, x, 8$. Se sabe que usando el teorema de Pítagoras podemos hallar la medida de los catetos con respecto a la hipotenusa, que sería la diagonal con longitud 8. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 8^2 \\ 2x^2 &= 64 \\ x^2 &= \frac{64}{2} \\ x^2 &= 32 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 5: Al beber medio litro de limonada solo se disminuye la cantidad del líquido pero no se afecta la composición del mismo. Por lo que la cantidad de agua seguirá siendo 50%. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 6: Con respecto al perímetro de la cuadrícula, los 4 triángulos tienen base 2. Las alturas con respecto a la base serían $2, 6, 6$ y 6. Entonces el área sombreada sería $\frac{2(2+6+6+6)}{2} = 20$.



Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 7: Notemos que $150 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2$. El cubo perfecto que se puede formar con sus factores primos más cercano es $27000 = 5^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3$ por lo que debe de ser multiplicado por 180. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 8: Por dato del problema, hay 25 personas que están en el club de matemáticas, literatura o ambos. Además hay 17 personas que están en el club de literatura. Para hallar el número de personas que están sólo en el club de matemáticas, del total se debe restar el número de personas que están en el club de literatura. Entonces, $25 - 17 = 8$ es el número de personas que sólo están en el club de matemáticas. Se sabe que hay 5 personas que acuden a los dos clubes. Entonces el total de personas en el club de matemáticas es $8 + 5 = 13$. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 9: Sea r el radio de la circunferencia. Se sabe que la fórmula para hallar el área de una circunferencia es $r^2 \cdot \pi$ y la fórmula para hallar la longitud de la circunferencia es $2 \cdot r \cdot \pi$. Por dato la longitud es 40, entonces $2 \cdot r \cdot \pi = 40$, por lo que $r = \frac{40}{2 \cdot \pi} = \frac{20}{\pi}$.
Entonces el área será:

$$\begin{aligned} r^2 \cdot \pi &= \frac{20^2}{\pi^2} \cdot \pi \\ r^2 \cdot \pi &= \frac{400}{\pi} \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 10: Se sabe que

$$\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{52} < \sqrt[3]{64} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{52} < 4$$

Así mismo,

$$\sqrt{1936} < \sqrt{2017} < \sqrt{2015} \Rightarrow 44 < \sqrt{2017} < 45$$

Por lo tanto, los enteros entre $\sqrt[3]{52}$ y $\sqrt{2017}$ son desde el 4 hasta el 44, en donde hay 41 enteros. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 11: Usando el principio fundamental del conteo se reordenan los cuatro números distintos 2, 0, 1, y 7 en sus posibles puestos a través de la operación: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 12: Al ser ΔQTR triángulo rectángulo, el área de ΔQTR es $\frac{QT \cdot RT}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$.
Se sabe que la medida de la altura de T a QR es igual al lado PQ, por lo que el área de ΔQTR es igual a $\frac{QR \cdot PQ}{2}$, como el área es 9, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{QR \cdot PQ}{2} &= 9 \\ \Rightarrow QR \cdot PQ &= 18 \end{aligned}$$

Como el área del rectángulo $PQRS$ es $QR \cdot PQ$, el área sería 18. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 13: Sea x la edad de Vicente. Por dato del problema $x = 8k + 2$, se sabe que los números del 50 al 80 que son de tal forma son $58, 66$ y 74. Así mismo, x es de la forma $7m + 3$, los números del 50 al 80 de esa forma son $52, 59, 66, 73$ y 80. 66 es la edad de Vicente al ser el único que cumple las dos condiciones. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 14: Como $A - 4 = B - 2$, entonces $A = B + 2$. Por lo que A es mayor a B.
Así mismo $A - 4 = C + 5$, entonces $A = C + 9$, por lo que A es mayor que C.
Por último, $A - 4 = D - 1$, lo que significa que $A = D + 3$, entonces A es mayor a D, así que A es el mayor.
Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 15:

Caso 1: $b = 0$. En este caso a y c tienen 9 opciones cada uno (del 1 al 9). Entonces habrían $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$ números.

Caso 2: $b \neq 0$. En este caso a tiene 9 opciones (del 1 al 9), b tiene 8 (del 1 al 9 sin contar la opción de a) y c tiene 9 opciones (del 0 al 9 sin contar la opción de b). Habría $9 \cdot 8 \cdot 9 = 648$.

En total habría $81 + 648 = 729$ números. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 16: Sea x el número de estampillas pegadas en una página. Por dato $70 = 5x$, entonces $x = 14$. Como el álbum tiene 29 páginas, el álbum tendrá $29x = 29 \cdot 14 = 406$ estampillas. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 17: Al trazar todas las diagonales, cada ángulo del hexágono se divide en 4 ángulos iguales de $30°$. Entonces habría $6 \cdot 4 = 24$ ángulos de $30°$ Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 18: $n^2 - 1$ es divisor de 63, así que $n^2 - 1$ es impar, por lo que n^2 es par. Entonces n es par. Si $n > 8$, entonces $n^2 - 1 > 8^2 - 1 = 63$, que es una contradicción. Así que $n \leq 8$. n puede ser $2, 4, 6$ y 8.
Remplazando en la ecuación original llegamos a que n sólo puede ser 2 y 8. Entonces hay dos enteros positivos que cumplen. Con lo que la respuesta es A.

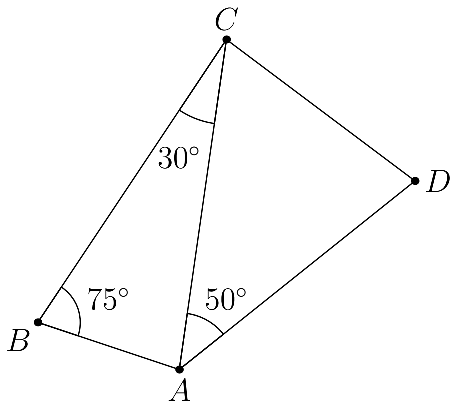
Solución del problema 19: Cada número de un *byte* tiene dos opciones, 0 o 1. Entonces el total de formas para un *byte* es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$. De las 256 formas, se descarta los *bytes* donde toda la secuencia es formada de 1's o 0's, que son dos *bytes* : 00000000 y 11111111. Entonces habría $256 - 2 = 254$ *bytes* diferentes. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 20: Sea x el número de semana para que haya igual cantidad de niños y niñas. En x semanas habrá $38 + 3x$ niños y $29 + 4x$ niñas, entonces

$$\begin{aligned} 29 + 4x &= 38 + 3x \\ 4x - 3x &= 38 - 29 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 21:



Se sabe que la suma de ángulos internos de un triángulo es $180°$. Entonces

$$\begin{aligned} \angle ACB + \angle CBA + \angle BAC &= 180° \\ 30° + 75° + \angle BAC &= 180° \\ \angle BAC &= 180° - 30° - 75° \\ \angle BAC &= 75° \end{aligned}$$

Como $\angle CBA = \angle BAC = 75^\circ$, tenemos que $AC = BC$.
Por dato $BC = AD$, entonces $AC = AD$. Como el triángulo ΔDAC es isósceles, los ángulos $\angle ADC$ y $\angle ACD$ son iguales.

$$\begin{aligned}
\angle ADC + \angle ACD + \angle CAD =& 180^\circ \\
2\angle ADC + 50^\circ =& 180^\circ \\
2\angle ADC =& 180^\circ - 50^\circ \\
\angle ADC =& \frac{130^\circ}{2} \\
\angle ADC =& 65^\circ
\end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 22: Notemos que la fracción dada es de la forma: $\frac{1}{5^n}$. Computando la operación para los primeros valores de n se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= 0.2 \\
\frac{1}{25} &= 0.04 \\
\frac{1}{125} &= 0.008
\end{aligned}$$

Con lo que se puede observar que la parte decimal del número $\frac{1}{5^n}$ equivale a un decimal de la forma: $\overline{0.000000\ldots}2^n$. Para saber la última cifra de la parte decimal de $\frac{1}{5^{2017}}$ se debe de hallar la última cifra de 2^{2017}. Sabemos también que la última cifra de una potencia de 2 sigue el siquiente ciclo: $2, 4, 8, 6$. Como $2017 = 4 \cdot 504 + 1$ la última cifra decimal del número será 2. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 23: Primero, se pintarán las casillas en vertical que comparten un lado. Como estas casillas comparten lado deben de tener colores diferentes. La casilla superior tiene 3 opciones de colores y la inferior tiene 2 ya que no puede tener el mismo color que la casilla superior. Este bloque vertical de dos casillas condiciona el color que pueden tener las dos casillas adyacentes, pues, como ya se han tomado dos colores para las dos casillas verticales y ambas son adyacentes a cada casilla horizontal a sus lados, estas casillas en horizontal solo tienen una opción de color: el color que no fue elegido para pintar las casillas en vertical. Por último, la primera casilla (viendo de izquierda a derecha) puede tener dos colores posibles (ya que no puede elegir el mismo color que la casilla a su lado). Con lo que la cantidad de formas de pintar el dibujo con la condición dada es $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12$. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 24: En cada fracción el denominador es un dígito menor al numerados por una unidad, por lo que $b = a - 1$. Al simplificar toda la expresión, tenemos que $\frac{a}{2} = 12$, con lo que $a = 24$ y $b = 23$, entonces $a + b = 24 + 23 = 47$. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 25: Se tiene que la suma $p + q + r$ es un número par (40) por lo que no pueden ser todos impares. Como los p, q y r son distintos entre sí tampoco pueden ser todos pares (2). Por lo que uno debe ser par y los otros dos impares. Como 2 es el único primo par y el menor primo, p debe de ser 2 al ser el menor primo en la lista. Con esto se tiene que $q + r = 38$ con q y r primos impares distintos. Por la suma y como $r > q$, $q \leq 14$. Con lo que los valores de q solamente pueden ser $3, 5, 7, 11$ para los cuales los valores de r correspondiente serían $35, 33, 31, 27$. De los cuales el único primo es 31. Por lo cual el valor de r es 31. Con lo que la respuesta es E.

2.1.3 NIVEL 3

TABLA DE RESPUESTAS

N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta	N°	Respuesta
1	D	6	B	11	C	16	E	21	D
2	A	7	A	12	B	17	D	22	C
3	C	8	A	13	E	18	D	23	D
4	C	9	B	14	B	19	D	24	D
5	E	10	E	15	E	20	D	25	B

Solución del problema 1: Andrea pone la torta a hornear a las 11:40 am. En los primeros 35 minutos serían las 12:15 pm. Como faltaría una hora, la torta se terminaría de hornear a la 1:15 pm. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 2: Sean a, b y c los niños que participaron en sólo carrera, sólo saltos y en ambas competencias, respectivamente. Por dato, $a+b+c=30$, $a+c=15$ y $b+c=20$. Si sumamos la segunda y tercera expresión, tenemos que $a+c+b+c=15+20$, entonces $a+b+2c=35$. Si restamos de esta la primera expresión, tendríamos que $a+b+2c-a-b-c=35-30$, por lo que $c=5$. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 3: Sea x la medida del lado de los cuadrados. El perímetro de la figura es la suma de 14 lados del cuadrado. Por dato el perímetro es 42, por lo que $14x=42$, entonces $x=3$. Se sabe que el área de cada uno de los 8 cuadrados es igual a x^2, entonces el área total sería $8\cdot x^2=8\cdot 3^2=72$, con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 4: Se sabe que $256\cdot 71<18200<256\cdot 72$ y $256\cdot 89<23000<256\cdot 90$. Entonces los números múltiplos de 256 que cumplen son del $256\cdot 71$ al $256\cdot 89$, hay 19 números. Con lo que la respuesta es C.

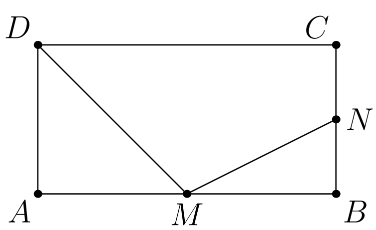
Solución del problema 5: Cada chico va a saludar a 4 chicas, como hay 5 chicos, habrán 20 saludos en total. En cada saludo se dan 2 besos, entonces al finalizar los saludos se habrán dado $2\cdot 20=40$ besos. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 6: Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los puntajes de los jueces. La media sería

$$\frac{P_1+P_2+\cdots+P_n}{n}=5.625$$

Como $P_1+P_2+\cdots+P_n$ es entero, entonces $5.625\cdot n$ es entero. Se descarta $n=6$, al $5.625\cdot 6=33.75$ no ser entero. Con $n=8$, $5.625\cdot 8=45$ si es entero. Entonces 8 es el menor número de jueces. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 7: El área del cuadrilátero $MNCD$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ΔDMC Y ΔCMN.



Se sabe que la fórmula para hallar el área de un triángulo es $\frac{b\cdot h}{2}$, donde b y h son la base y altura, respectivamente. La altura de M a DC será la misma altura de B a DC por ser AB y CD paralelas, entonces el área de ΔDMC es igual a

$$\frac{DC\cdot BC}{2}=\frac{AB\cdot BC}{2}$$

Como MB es perpendicular a CN, MB es la altura de M a CN, entonces el área de ΔCMN es

$$\frac{CN \cdot MB}{2} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}AB}{2} = \frac{\frac{BC \cdot AB}{4}}{2} = \frac{BC \cdot AB}{8}$$

El área de $MNCD$ sería

$$\frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{AB \cdot BC}{8} = AB \cdot BC\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = AB \cdot BC \cdot \frac{5}{8}$$

Como el área del rectángulo $ABCD$ es $AB \cdot BC$, el área de $MNCD$ representa $\frac{5}{8} \times \text{Área}(ABCD)$, con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 8: Los múltiplos de 5 terminan en 0 o 5, entonces el dígito de las unidades tiene que ser 5. El dígito de las decenas tiene 4 opciones, como no se puede repetir, el dígito de las centenas tiene 3, así el de las unidades de mil tiene 2 opciones y el dígito de las decenas de mil sería el número que sobra. Entonces se escribieron $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números. Con lo que la respuesta es A.

Solución del problema 9: Si 2 chocolatinas vale 4 horas, la mitad ($\frac{2}{2} = 1$ chocolatina) valdría $\frac{4}{2} = 2$ horas. Así mismo, si 12 dulces valen 3 horas, la tercera parte ($\frac{12}{3} = 4$ dulces) valdría $\frac{3}{3} = 1$ hora. Entonces una chocolatina y 4 dulces valdría $2 + 1 = 3$ horas. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 10: Se sabe que $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$, entonces la longitud de arco AB será un tercio del perímetro de la circunferencia. Se sabe que el radio es 10, por lo que el perímetro de la circunferencia es $2 \cdot 10 \cdot \pi$, entonces la longitud del arco AB será $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot \pi = \frac{20\pi}{3}$. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 11: El problema se resume a hallar el menor número múltiplo de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, que es 420. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 12: Sea n el menor entero, tenemos que la suma es

$$\begin{aligned}
871 =& n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+25) \\
=& 26n + (1 + 2 + \cdot + 25) \\
=& 26n + \frac{25 \cdot 26}{2} \\
=& 26n + 25 \cdot 13 \\
=& 26n + 325
\end{aligned}$$

Entonces $26n = 871 - 325 = 546$, por lo que $n = \frac{546}{26} = 21$. Con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 13: Como habrá dos chicas en el grupo de 5, debería haber 3 chicos. Las formas de escoger 2 de 3 chicas es $\binom{3}{2}$. Así mismo, las formas de escoger 3 chicos de 6 es $\binom{6}{3}$. Por lo que se puede formar $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3} = 3 \cdot 20 = 60$ grupos distintos. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 14: Sea x el lado del cuadrado de área mayor a 1 y y el lado del cuadrado inicial. Por dato $35 + x^2 = y^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
35 + x^2 &\equiv y^2 \pmod 4 \\
\Rightarrow 3 + x^2 &\equiv y^2 \pmod 4
\end{aligned}$$

Como los cuadrados perfectos sólo tienen residuo 0 o 1 $\pmod 4$, $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ y $y^2 \equiv 0 \pmod 4$. Entonces y es par, por lo que sólo puede ser 18 o 324. Si $y = 324$, $x^2 = 324^2 - 35$, pero $324^2 - 35 = 104941$ no es cuadrado.
Entonces $y = 18$, con lo que la respuesta es B.

Solución del problema 15: Sean l_1, l_2, l_3 y l_4 los lados de los rectángulos.

	l_1	l_2
l_3	21	48
l_4	35	x

Se tiene que $21 = l_1 \cdot l_3$, $35 = l_1 \cdot l_4$, $48 = l_2 \cdot l_3$ y $x = l_2 \cdot l_4$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{(l_2 \cdot l_3)(l_1 \cdot l_4)}{l_1 \cdot l_3} \\ \Rightarrow x &= \frac{48 \cdot 35}{21} \\ \Rightarrow x &= 80 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 16: Sea $3k$ el número de galletas con las que empezó Adrián. Por dato, Paula tendría $5k$ al empezar. Paula al entregar la galleta se queda con $5k - 1$ galletas y Adrían con $3k + 1$. Paula quedó con 3 galletas por cada 2 de Adrían, entonces

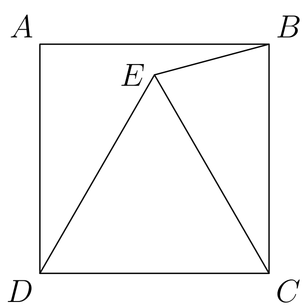
$$\begin{aligned} \frac{5k-1}{3k+1} &= \frac{3}{2} \\ 2(5k-1) &= 3(3k+1) \\ 10k - 2 &= 9k + 3 \\ k &= 5 \end{aligned}$$

Entonces Paula empezó con $5 \cdot 5 = 25$ galletas. Con lo que la respuesta es E.

Solución del problema 17: Hay 10 números que terminan en $2, 4, 6$ y 8, cada uno, del 1 al 99, entonces R tendría dígito de las unidades igual al dígito de las unidades de $2^{10} \cdot 4^{10} \cdot 6^{10} \cdot 8^{10}$. Se sabe que el dígito de las unidades de $2^{10} \cdot 8^{10} = 16^{10}$ es 6. Además, se sabe que el dígito de las unidades de $4^{10} \cdot 6^{10} = 24^{10} = 576^5$ es 6. Como $6 \cdot 6 = 36$, entonces R termina con dígito 6, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 18: Como ΔCDE es equilátero, entonces $EC = DC$. Además, $ABCD$ es cuadrado y $BC = DC$, entonces $EC = BC$.

Caso 1: $\triangle CDE$ esta dentro de $ABCD$.

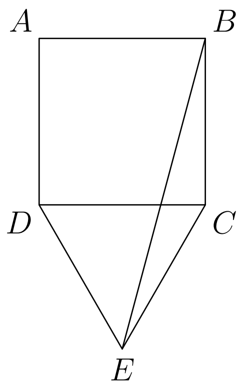


$$\begin{aligned} \angle BCE + \angle ECD &= \angle BCD \\ \angle BCE + 60^\circ &= 90^\circ \\ \angle BCE &= 30^\circ \end{aligned}$$

Como el ΔBCE is isósceles, los ángulos $\angle CBE$ y $\angle BEC$ son iguales. Entonces

$$\begin{aligned}\angle CBE + \angle BEC + \angle BCE =&180^\circ\\ 2\angle BEC =&180^\circ - \angle BCE\\ \angle BEC =&\frac{180^\circ - 30^\circ}{2}\\ \angle BEC =&75^\circ\end{aligned}$$

Caso 2: ΔCDE esta fuera de $ABCD$.



$$\begin{aligned}\angle BCE =&\angle BCD + \angle DCE\\ \angle BCE =&90^\circ + 60^\circ\\ \angle BCE =&150^\circ\end{aligned}$$

Como el ΔBCE is isósceles, los ángulos $\angle CBE$ y $\angle BEC$ son iguales. Entonces

$$\begin{aligned}\angle CBE + \angle BEC + \angle ECB =&180\\ 2\angle BEC =&180^\circ - \angle BCE\\ \angle BEC =&\frac{180^\circ - 150^\circ}{2}\\ \angle BEC =&15^\circ\end{aligned}$$

La suma de los posibles valores de $\angle BEC$ es $75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 19: Si Q saluda a T. P, Q y T ya no saludarían a nadie más al producirse el saludo de P, Q y los dos saludos de T. Entonces R y S sólo se pueden saludar entre ellos, pero R y S saludan a dos personas cada una, lo que es una contradicción. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 20: Sean x, y y z el largo, ancho y alto de la caja. Por dato $x \cdot y = 77$ terrones. Al comerse la capa superior, el alto sería ahora $z - 1$. Luego come la cara lateral que son $y(z-1) = 55$ terrones. Por lo que $y = 11$, entonces $x = 7$ y $z = 6$. Al comienzo había $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ terrones, María comió $77 + 55 = 132$ de ellos, entonces quedarían $462 - 132 = 330$ terrones en la caja. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 21: Sea x el número de rondas que ganó Tania, como son 12 rondas, ella perdió $12 - x$ rondas. Entonces

$$\begin{aligned}5x + 3(12 - x) =&44\\ 5x + 36 - 3x =&44\\ 2x =&8\\ x =&4\end{aligned}$$

Tania ganó 4 de las 12 rondas, entonces Adrián ganó 8 rondas. Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 22: Sea x, y y z los números que faltan de izquierda a derecha.

x	10	5
8	y	4
7	2	z

Por dato los números de cada fila, columna o diagonal suman lo mismo. Entonces $x + 10 + 5 = 8 + y + 4$, por lo que $y = x + 3$.
Así mismo, $x + 10 + 5 = 7 + 2 + z$, por lo que $z = x + 6$.

x	10	5
8	$x+3$	4
7	2	$x+6$

También $x + 10 + 5 = x + y + z = x + (x + 3) + (x + 6)$, entonces $x + 15 = 3x + 9$, con lo que $x = 3$. Entonces el producto sería $3 \cdot 6 \cdot 9 = 162$. Con lo que la respuesta es C.

Solución del problema 23: Sean x, y, z los partidos en los que se obtuvo 1, 2 y 3 puntos respectivamente. Por dato $x + 2y + 3z = 9$. Se jugó 4 partidos, entonces $x + y + z = 4$. Reemplazando en la ecuación inicial: $(x + y + z) + y + 2z = 4 + y + 2z = 9$, entonces $y + 2z = 5$.
Con esto, se pueden calcular los posibles valores de (y, z) que son: $(1, 2), (3, 1)$.

Caso 1: $(x, y, z) = (1, 1, 2)$, por lo que los puntajes serían $1, 2, 3$ y 3 en algún orden. La cantidad de maneras para escoger 2 de 4 partidos de 3 puntos, el partido de 2 puntos y el partido de 1 punto es $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Caso 2: $(x, y, z) = (0, 3, 1)$, por lo que los puntajes serían $2, 2, 2$ y 3 en algún orden. La cantidad de formas de escoger el único partido de 3 puntos es $\binom{4}{1} = 4$, los otros partidos serían de 2 puntos.

El total de maneras es $12 + 4 = 16$, con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 24: Como $ABCD, AEHI$ y $EFGH$ son congruentes, los lados AE, EF y AD son iguales. $AF = AE + EF = 2 \cdot AD$.
En el triángulo rectángulo AFD, la hipotenusa tiene longitud $2 \cdot AD$ y un cateto tiene longitud AD, usando el teorema de Pitágoras podemos hallar la medida del otro cateto que sería:

$$DF = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{4 \cdot AD^2 - AD^2} = \sqrt{3} \cdot AD$$

El triángulo AFD tiene lados $2 \cdot AD$, $\sqrt{3} \cdot AD$ y AD, es conocido que sus ángulos son $90°, 60°$ y $30°$. Entonces $\angle FAD = \angle EAD = 60°$.
La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, entonces

$$\angle EAD + \angle ADJ + \angle DJE + \angle JEA = 360° \Rightarrow 60° + 90° + \angle DJE + 90° = 360° \Rightarrow \angle DJE = 120°$$

Con lo que la respuesta es D.

Solución del problema 25: Para que el número sea el producto de todos sus divisores (diferentes al mismo) debe de ser de la forma: $P_1 \cdot P_2$ o P_1^3, donde P_1 y P_2 son números primos distintos, para que sus divisores diferentes al mismo sean $1, P_1$ y P_2 o en otro caso $1, P_1, P_1^2$. Los números de la lista serían: $2 \cdot 3, 2^3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 2 \cdot 11, \ldots$
Como 21 es el sexto número de la lista, la respuesta es B.

2.1.4 NIVEL U

Solución del problema 1: El numerador es igual a

$$(1^3+2^3+\cdots+39^3)-(1^3+2^3+\cdots+20^3)=\left(\frac{39\times 40}{2}\right)^2-\left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2$$

El denominador es igual a

$$(1+2+\cdots+39)-(1+2+\cdots+20)=\frac{39\times 40}{2}-\frac{20\times 21}{2}$$

Se tiene que la fracción que se desea evaluar es

$$\frac{(\frac{39\times 40}{2})^2-(\frac{20\times 21}{2})^2}{\frac{39\times 40}{2}-\frac{20\times 21}{2}}=\frac{39\times 40}{2}+\frac{20\times 21}{2}=990$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{990}$.

Solución del problema 2: Sea a_n el enésimo número de la secuencia. Se puede notar que

$$a_n=2\times 10^{2n+1}+530(1+100+\cdots+100^{n-1})+4.$$

De aquí se puede concluir que $a_n\equiv 35n+24 \pmod{99}$. Ya que 35 es coprimo con 99, se puede concluir que $n=87$ es el menor resto tal que $35n+24\equiv 0 \pmod{99}$ por lo que la cantidad de dígitos de N es $2(87)+2=186$. Con lo que la respuesta es $\boxed{186}$.

Solución del problema 3: Sea X_n el valor esperado del número de personas levantadas antes de la n-ésima persona. Se tiene:

$$X_n=X_{n-1}+\frac{X_n+1}{n+1}\Rightarrow\frac{nX_n-1}{n+1}=X_{n-1}\Rightarrow nX_n-1=X_{n-1}(n+1)$$

Se sabe que $X_1=0$, $X_2=\frac{1}{2}$, $X_3=1$, $X_4=\frac{3}{2}$, $X_5=2$. Usando inducción se observa que $X_n=\frac{n-1}{2}$. Así $X_{501}=\frac{500}{2}=250$. Con lo que la respuesta es $\boxed{250}$.

Solución del problema 4: Se puede dividir el cuadrado donde se efectúa la integración en dos triángulos usando la recta $y=x$, de modo que en el triángulo superior el mínimo es x y en el inferior el mínimo es y. Por ende

$$\int_0^9\int_0^9\min\{x,y\}dxdy=\int_0^9\left(\int_0^y xdx+\int_y^9 ydx\right)dy=\int_0^9\left(9y-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{9^3}{2}-\frac{9^3}{6}=\frac{9^3}{3}=243$$

Alternativamente se puede notar que es el volumen de dos pirámides triangulares iguales cuyas bases son los triángulos mencionados previamente y la altura es 9. Con lo que la respuesta es $\boxed{243}$.

Solución del problema 5: S es un triángulo cuyos vértices son $(0,0),(0,12),(8,4)$, y obviamente es un región convexa. f es convexa en todo el plano y cumple que

$$\nabla f=\begin{bmatrix}8(x-5) & 2(y-5)\end{bmatrix},\quad H_f=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Como el hesiano tiene eigenvalores 2 y 8, se concluye que un punto crítico local es un mínimo local, y por ser convexa la función, el mínimo local es el mínimo global. Este mínimo se da en el punto $(5,5)$ que es donde se anula el gradiente. El máximo se da para alguno de los vértices de S. Es fácil comprobar que el máximo en este conjunto se da para el punto $(0,12)$, y es igual a $f(0,12)=4(0-5)^2+(12-5)^2+1=150$. Alternativamente, se puede definir un lagrangiano considerando las restricciones del dominio y aplicar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para obtener el punto. Con lo que la respuesta es $\boxed{150}$.

Solución del problema 6: Como $a_0 > 8$, es fácil ver inductivamente que $a_n > 8$ pues $a_{n+1}^2 > 48 + 16 = 64$ y los términos son positivos. Además es fácil comprobar que $a_1 < a + 0$ e inductivamente $a_{n+1} < a_n$ implica que $a_{n+1} < a_{n+1}$. Se concluye que la secuencia es decreciente y acotada inferiormente, por ende converge. Más aún el límite cumple $L \geq 8$.
Aplicando la operación límite a ambos lados de la recurrencia, se tiene que $L^2 = 6L + 16 \implies L = -2$ o $L = 8$, por lo que se puede concluir que $L = 8$ y así la respuesta es $\boxed{8}$.

Solución del problema 7: Sea $k = \max(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, luego

$$k = (k^n)^{\frac{1}{n}} \leq (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{10}^n)^{\frac{1}{n}} \leq (10k^n)^{\frac{1}{n}} = (10)^{\frac{1}{n}} k$$

Es conocido que $\lim\limits_{n\to\infty} (c)^{\frac{1}{n}} = 1$ para todo $c > 0$. Luego ambos extremos de la desigualdad planteada convergen a k y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{10}^n)^{\frac{1}{n}} = k$$

Por los datos $k \leq 91$, luego el máximo es 91. Con lo que la respuesta es $\boxed{91}$.

Solución del problema 8: Reemplazando $x = y = 0$, se concluye que $f(0) = 0$. Se define la función $g(x) = f(x) - x^2 - x$, luego $g(0) = 0, g(1) = 0$ y

$$g(x+y) + (x+y)^2 + (x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy = g(x) + x^2 + x + g(y) + y^2 + y + 2xy$$

$$\implies g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Luego g es una función continua que cumple la ecuación de Cauchy, y por ende es una función lineal. Pero como toma valores 0 para dos puntos, e igual a 0 en toda la recta. Se concluye que $f(x) = x^2 + x$. Finalmente,

$$\lfloor f(\sqrt{401}) \rfloor = 401 + \lfloor \sqrt{401} \rfloor = 421$$

Alternativamente, se puede demostrar que $f(x) = x^2 + x$ para todos los enteros no negativos por inducción, luego extender para los enteros negativos y los racionales. Por continuidad se debe cumplir para todos los reales. Con lo que la respuesta es $\boxed{421}$.

Solución del problema 9: z conmuta con todas las matrices g en el conjunto, luego si

$$z = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & g_1 & g_2 \\ 0 & 1 & g_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ende, $gz = zg$ implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & g_1 + z_1 & g_2 + z_2 + g_1 z_3 \\ 0 & 1 & g_3 + z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g_1 + z_1 & g_2 + z_2 + g_3 z_1 \\ 0 & 1 & g_3 + z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $g_1 z_3 = g_3 z_1$ para todos los reales g_1, g_3. Por tanto $z_1 = z_3 = 0$ y z_2 es el único término no nulo fuera de la diagonal. Se concluye que $z_2 = 397$ y es el máximo valor entre las entradas de z. Con lo que la respuesta es $\boxed{397}$.

Solución del problema 10: La probabilidad de que pueda hacer el pie es igual a la probabilidad de que haya al menos 5 manzanas buenas, es decir

$$6(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^6 = \frac{6 \times 32 + 64}{3^6} = \frac{256}{729}$$

Por ende $p = 256, q = 729$ y se tiene que $p + q = 985$. Con lo que la respuesta es $\boxed{985}$.

Solución del problema 11: Se dice que un recta en el plano es racional si tiene pendiente e intercepto racionales. Claramente, la recta que pasa por dos puntos racionales es racional. Adicionalmente, la mediatriz del segmento formado por dos puntos racionales es una recta racional. Por otro lado, se tiene que la intersección de dos rectas racionales es un punto racional, pues todos los coeficientes en el sistema resultante son racionales.
Si la circunferencia tiene al menos 3 puntos racionales, existe un triángulo con vértices racionales, y por lo anterior sus 3 mediatrices son racionales y consecuentemente el circuncentro es racional lo cual contradice el enunciado. Luego hay a lo sumo 2 puntos racionales. Existe una circunferencia con centro en $(0, \sqrt{2})$ que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, lo cual es un ejemplo para este caso. Con lo que la respuesta es $\boxed{2}$.

Solución del problema 12: Como las 4 ramas no se intersecan, la envoltura convexa de S debe tener al menos 4 puntos. Como se desea hallar la mínima área, se asume que sólo tiene 4 puntos, los cuales pertenecen cada uno a una rama de las hipérbolas. Existen reales positivos a, b, c, d tales que los puntos en orden antihorario son

$$\left(a, \frac{20}{a}\right), \left(-b, \frac{5}{b}\right), \left(-c, \frac{-20}{c}\right), \left(d, \frac{-5}{d}\right)$$

El área de este cuadrilátero es

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{5a}{b} + \frac{20b}{a} + \frac{20b}{c} + \frac{5c}{b} + \frac{5c}{d} + \frac{20d}{c} + \frac{20d}{a} + \frac{5a}{d}\right) \geq \frac{4 \times 20}{2} = 40$$

El mínimo valor que puede tomar el área es 40 y se da para el caso $a = c, b = d, \frac{a}{b} = 2$. Con lo que la respuesta es $\boxed{40}$.

Solución del problema 13: Se define $a - b = kc$, luego hay que hallar k^2. La ecuación característica es igual a $x^2 - (a+b)x + ab - c^2 = 0$ cuyas raíces son $\frac{a+b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ con $\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 = (k^2+4)c^2$. Luego los valores propios son $\frac{a+b\pm\sqrt{k^2+4}c}{2}$, de donde se concluye que $k^2 = 96$. Con lo que la respuesta es $\boxed{96}$.

Solución del problema 14: Se tiene que $8\det(A) = \det(2A) = 1000$, entonces $\det(A) = 125$. Consecuentemente $\det(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)} = 1000$. Además, se tiene que $\text{traza}(B) = \text{traza}(ABA^{-1}) = 30$.
Sean a, b, c los valores propios de B, por lo anterior $a + b + c = 30$ y $abc = 1000$, entonces

$$\frac{a+b+c}{3} = 10 = \sqrt[3]{abc}$$

Es decir que son reales positivos que cumplen la igualdad en la desigualdad MA-MG, por ende $a = b = c = 10$. Con lo que la respuesta es $\boxed{10}$.

Solución del problema 15: Al restar una fila de otra, el determinante no varía. Si se resta la cuarta fila de la quinta, la tercera fila de la cuarta, la segunda fila de la tercera y la primera fila de la segunda, todos los elementos debajo de la diagonal serían iguales a 0 y el determinante no varía. Por tanto el determinante es igual al producto de las entradas en la diagonal:

$$1, \frac{1}{2} - 1, \frac{1}{3} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{3}, \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$$

Luego

$$\det A = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{12}\right)\left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{4!5!} = \frac{1}{2880}$$

Entonces

$$\frac{1}{10\det A} = \frac{2880}{10} = 288$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{288}$.

2.2 SEGUNDA FASE

2.2.1 NIVEL 1

Solución del problema 1: $\overline{35u}$ debe ser múltiplo de 2 y 3. Entonces u es un número par y $3+5+u=8+u$ es un múltiplo de 3. Las posibilidades de u son: $0,2,4,6,8$. Reemplazando estos posibles valores en la suma $(3+5+u)$ se tiene: $8,10,12,14,16$, del cual el único múltiplo de 3 es 12. Por lo que u solo puede tomar el valor de 4. Con lo que la respuesta es $\boxed{1}$.

Solución del problema 2: El número de manzanas debe ser par. Entonces mínimo se debe comer 1 manzana. Por lo que 12 sería el doble del número de naranjas, entonces habría 6 naranjas. Porlo que debería de comer 5 naranjas. En total se debe comer $1+5=6$ frutas. Con lo que la respuesta es $\boxed{6}$.

Solución del problema 3: Sabemos que $(YAX)=\frac{AY\cdot AX}{2}$, entonces

$$(YAX)=\frac{(AB-BY)\cdot AX}{2}=\frac{1\cdot 4}{2}=2$$

Así mismo, $(YBZ)=\frac{BY\cdot BZ}{2}$, entonces

$$(YBZ)=\frac{4\cdot 6}{2}=12$$

Luego, $(ZCD)=\frac{ZC\cdot CD}{2}$, entonces

$$(ZCD)=\frac{(BC-BZ)\cdot CD}{2}=\frac{2\cdot 5}{2}=5$$

Entonces,

$$(XYZD)=(ABCD)-[(YAX)+(YBZ)+(ZCD)]=5\cdot 8-(2+12+5)=40-19=21$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{21}$.

Solución del problema 4: Sean a_1,a_2,a_3,a_4 y a_5 los enteros positivos distintos tales que su suma da 20. Sin perdida de generalidad $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$.
Si $a_1\geq 3$, entonces

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\geq 3+4+5+6+7$$
$$\Longrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\geq 25$$

Lo cual es una contradicción, por lo que $a_1\leq 2$.
Si $a_1=2$, entonces

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\geq 2+3+4+5+6$$
$$\Longrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\geq 20$$

Por lo que solo habría una forma de escoger los números $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ que sumen 20 si el menor de ellos es 2.
Si $a_1=1$, hay 6 formas de escribir la lista de números: $(1,2,3,4,10)$, $(1,2,3,5,9)$, $(1,2,3,6,8)$, $(1,2,4,5,8)$, $(1,2,4,6,7)$ y $(1,3,4,5,7)$. Entonces hay un total de $1+6=7$ formas en las que Daniel puede escribir la lista de 5 números. Con lo que la respuesta es $\boxed{7}$.

Solución del problema 5: Para que el número deje residuo 6 cuando es dividido para 9, la suma de sus dígitos debe de dejar residuo 6 al ser dividido para 9. La suma de los dígitos del número es: $5+0+2+x+7=14+x$. Se sabe que 14 deja residuo 5 al ser dividido para 9, por lo que para que $14+x$ deje residuo 6, x debe dejar residuo 1, por lo que $x=1$. Con lo que la respuesta es $\boxed{1}$.

Solución del problema 6: Sean A y B los equipos. Supongamos que A ganó x partidos y empató y. Entonces, B también empató y partidos y ganó $8-x-y$ partidos. El puntaje de A sería $3x+y$ y el de B sería $3(8-x-y)+y$, como la suma de los puntajes es 22, tenemos que

$$\begin{aligned} 3x+y+3(8-x-y)+y &= 22 \\ 3x+y+24-3x-3y+y &= 22 \\ 24-y &= 22 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{2}$.

Solución del problema 7: Los triángulos BEF y FGC tienen la misma altura con respecto a BF y FC, que es igual a AB. Entonces

$$S_4+S_5=\frac{BF\cdot AB}{2}+\frac{FC\cdot AB}{2}=\frac{AB(BF+FC)}{2}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{(ABCD)}{2}$$

Entonces $S_1+S_2+S_3=(ABCD)-(S_4+S_5)=\frac{(ABCD)}{2}$. Como $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5$, tenemos que $S_1+S_2+S_3-S_4-S_5=0$. Con lo que la respuesta es $\boxed{0}$.

Solución del problema 8: Sean las personas ubicadas en el siguiente orden: $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_{16}$ en donde p_1 denomina a la persona ubicada en el primer puesto. Al principio, todas las personas que ocupan un puesto par van a sentarse y todas las personas que ocupaban un puesto impar quedarán paradas en el siguiente orden: $p_1, p_3, p_5, p_7, p_9, p_{11}, p_{13}, p_{15}$. Para el siguiente movimiento, todas las personas con un subíndice de la forma $4k+3$ quedarán sentadas. con esto, quedarán de pie: p_1, p_5, p_9 y p_{13} en ese orden. En el siguiente movimiento se sentarán p_5 y p_{13}. Finalmente, en el último movimiento se sentará p_9 con lo que p_1 será la unica persona que quede de pie. Con lo que la respuesta es $\boxed{1}$.

Solución del problema 9: Sea p y c la cantidad de patos y conejos, respectivamente. Por dato

$$c-p=\frac{1}{2}\cdot(c+p)\Rightarrow 2(c-p)=c+p\Rightarrow 2c-2p=c+p\Rightarrow c=3p\Rightarrow \frac{c}{p}=3$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{3}$.

Solución del problema 10: Para que el número sea múltiplo de 6, debe de ser múltiplo de 2 y de 3. Entonces a debe ser par. Para que sea múltiplo de 3, $b+4+a$ debe ser múltiplo de 3.

Caso 1: $a=0$ o $a=6$, b podría ser $2,5$ y 8.

Caso 2: $a=2$ o $a=8$, b podría ser $3,6$ y 9.

Caso 3: $a=4$, b podría ser $1,4$ y 7.

Por lo que habría $5\times 3=15$ parejas (a,b), con lo que la respuesta es $\boxed{15}$.

Solución del problema 11: El área de $EFGH$ es 25, por lo que el lado del cuadrado sería 5.
En el triángulo DHC, la recta RG es la paralela media de DH, al ser $RG \parallel DH$ y R punto medio de DC. Entonces $HG=GC=5$.
Sea $\angle HCD=\alpha$, entonces $\angle CDH=180^\circ-(\angle DHC+\angle HCD)=180^\circ-(90^\circ+\alpha)=90^\circ-\alpha$, de donde $\angle SHD=90^\circ-\angle CDH=\alpha$.

Se sabe que $DS=RC$ al ser ambos la mitad del lado del cuadrado $ABCD$. Tenemos que $DS=RC$, $\angle GCR=\angle SHD=\alpha$ y $\angle SHD=\angle RGC=90^\circ$, entonces $\Delta HDS\simeq\Delta GCR$ (Por $a\cdot l\cdot a$). Con lo que $DH=GC=5$.
Por el teorema de Pitágoras en $\triangle DHC$ se tiene $DC^2=DH^2+HC^2=5^2+10^2=125$, como el área del cuadrado $ABCD$ es DC^2, el área sería 125, por lo que la respuesta es $\boxed{125}$.

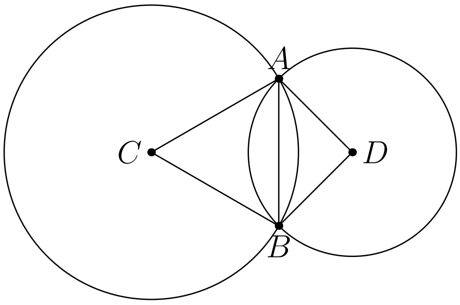
Solución del problema 12: Luego del 2012 seguiría $2020, 2021, 2022, 2100, \ldots$, por lo que $a = 2020$ y $d = 2100$. Entonces $d - a = 2100 - 2020 = 80$. Con lo que la respuesta es $\boxed{80}$.

Solución del problema 13: Sean los centros de cada cuadradito unitario los puntos (0,0) hasta (9,9), donde el centro (0,0) está en la esquina inferior izquierda y el centro (9,9) está en la esquina superior derecha.
Si el cuadrado tiene lado n y se escoge el vértice inferior izquierdo del cuadrado, sea este el centro (a, b), los otros vértices del cuadrado tendrán coordenadas $(a, b+n)$, $(a+n, b+n)$ y $(a+n, b)$ para los vértices superior izquierdo, superior derecho e inferior izquierdo, respectivamente.
Luego, la coordenada (x, y) del vértice superior derecho del cuadrado es como máximo $(9, 9)$, por lo que la coordenada (x, y) del vértice inferior izquierdo es a lo mucho $(9-n, 9-n)$. Hay $(10-n)^2$ opciones para escoger el vértice inferior izquierdo, como $n \leq 9$, el número total de cuadrados será

$$\sum_{i=1}^{9}(10-i)^2 = \sum_{i=1}^{9}(i)^2 = \frac{9(10)(19)}{6} = 285$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{285}$.

Solución del problema 14:



Se sabe que $AD = BD = 5\sqrt{2}$ al ser ambos radios de la circunferencia con centro en D. Como $\angle ADB = 90°$, podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar AB.

$$AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{2 \cdot AD^2} = \sqrt{2 \cdot (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10$$

Como $AC = BC$ por ser radios de la circunferencia con centro en C, el triángulo ΔACB es isósceles, entonces $\angle BAC = \angle CBA$. Se sabe que la suma de ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces

$$\begin{aligned} \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB &= 180° \\ 2 \cdot \angle BAC + 60° &= 180° \\ \angle BAC &= 60° \end{aligned}$$

Entonces los ángulos $\angle CAB$ y $\angle BCA$ también serán $60°$. Como los tres ángulos de ΔACB son iguales, podemos concluir que el triángulo ΔACB es equilátero, por lo que $AB = BC = CA = 10$. Con lo que la respuesta es $\boxed{10}$.

Solución del problema 15: Se tiene que $\overline{ba}^2$ es un cubo perfecto, por lo que $\overline{ba}$ es un cubo perfecto. Se sabe que los únicos cubos perfectos de 2 dígitos son 27 y 64.
Si $\overline{ba} = 27$, $b = 2$ y $a = 7$.
$\Rightarrow 27^2 = 9^3 = \overline{cb}^3$, entonces $\overline{cb} = 9$, pero $c \neq 0$. Por lo que respesenta una contradicción a lo antes asumido.
Si $\overline{ba} = 64$, $b = 6$ y $a = 4$.
$\Rightarrow 64^2 = 16^3 = \overline{cb}^3$, entonces $\overline{cb} = 16$, por lo que $c = 1$. La suma sería $4 + 6 + 1 = 11$. Con lo que la respuesta es $\boxed{11}$.

2.2.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 5 del nivel 1.

Solución del problema 2: Véase la solución del problema 8 del nivel 1.

Solución del problema 3: Sean los promedios $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{a+d}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b+d}{2}$ y $\frac{c+d}{2}$. Por dato del problema, los promedios son $2, 4, 5, 8, 9$ y 11 en algún orden. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{a+d}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{b+d}{2}+\frac{c+d}{2} &= 2+4+5+8+9+11 \\ \Rightarrow \frac{3\cdot(a+b+c+d)}{2} &= 39 \\ \Rightarrow a+b+c+d &= 26 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{26}$.

Solución del problema 4: Véase la solución del problema 7 del nivel 1.

Solución del problema 5: Si $\overline{a679b}$ es múltiplo de 72, entonces es múltiplo de 9 y 8. Para ser múltiplo de 8, el número formado por los tres últimos dígitos tiene que ser múltiplo de 8, entonces $\overline{79b}$ es múltiplo de 8. Por lo que b sería 2.
Para ser múltiplo de 9, la suma de sus dígitos tiene que ser múltiplo de 9. Entonces $a+6+7+9+2=24+a$ es múltiplo de 9. Por lo que a sería 3.
Entonces la suma $a+b=3+2=5$. Con lo que la respuesta es $\boxed{5}$.

Solución del problema 6: Véase la solución del problema 12 del nivel 1.

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 11 del nivel 1.

Solución del problema 8: Véase la solución del problema 13 del nivel 1.

Solución del problema 9: $8!$ es múltiplo de 2. Entonces $8!+2, 8!+4, 8!+6, 8!+8$ serían múltiplos de 2. Así mismo, $8!$ es múltiplo de $3, 5$ y 7, por lo que $8!+3$ sería múltiplo de 3; $8!+5$ sería múltiplo de 5 y $8!+7$ sería múltiplo de 7.
Entonces no existe p. Con lo que la respuesta es $\boxed{0}$.

Solución del problema 10:

$$\begin{aligned} 16^n+16^n+16^n &= 6\times 2^{2011} \\ \Rightarrow 3\cdot(2^4)^n &= 3\cdot 2^{2012} \\ \Rightarrow 2^{4n} &= 2^{2012} \end{aligned}$$

Como comparten misma base, podemos igualar los exponentes, entonces $4n=2012$, por lo que $n=\frac{2012}{4}=503$. Entonces $\sqrt[3]{n+9}=\sqrt[3]{503+9}=\sqrt[3]{512}=8$. Con lo que la respuesta es $\boxed{8}$.

Solución del problema 11: Véase la solución del problema 14 del nivel 1.

Solución del problema 12: Se tiene que $2a<b \Rightarrow 2a+1\leq b \Rightarrow 3(2a+1)\leq 3b$.

Se sabe que $3b<c$ entonces $3(2a+1)+1\leq c \Rightarrow 4(3(2a+1)+1)\leq 4c$, además $4c<d$ entonces $4(3(2a+1)+1)+1\leq d$.

Tenemos que d es mínimo cuando a es mínimo. Como son enteros positivos, a es mínimo cuando es 1, entonces $4(3(2\cdot 1+1)+1)+1\leq d \Rightarrow 41\leq d$, con lo que la respuesta es $\boxed{41}$.

Solución del problema 13: Sea $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k}$ en su descomposición canónica. Se sabe que la cantidad de divisores de n es $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} 242^4 \times 26^3 &= (11^2 \cdot 2)^4 \times (13 \cdot 2)^3 \\ &= 11^8 \cdot 2^4 \cdot 13^3 \cdot 2^3 \\ &= 2^7 \cdot 11^8 \cdot 13^3 \end{aligned}$$

Con la que la cantidad de divisores de $242^4 \times 26^3$ es $(7+1)(8+1)(3+1) = (8)(9)(4) = 288$ Con lo que la respuesta es $\boxed{288}$.

Solución del problema 14: $49 = 7 \times 7$, por lo que el número debe tener dos dígitos 7, el resto sólo pueden ser dígitos 1. De un número de n dígitos, donde sólo dos son 7 y los demás son 1's, el número de formas es $\binom{n}{2}$. Luego, el número a lo mucho tiene 9 dígitos, entonces la cantidad de números es:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{9} \binom{i}{2} = \binom{2}{2} + \dots + \binom{9}{2} \\ \Rightarrow &\sum_{i=2}^{9} \binom{i}{2} = \binom{10}{3} \\ \Rightarrow &\sum_{i=2}^{9} \binom{i}{2} = 120 \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{120}$.

Solución del problema 15: Por dato ΔABC y ΔCDE son congruentes y equílateros, entonces $BC = CD$ y $\angle BCA = 60^\circ$. Ádemas, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$.
Como ΔBCD es isósceles, los ángulos $\angle CBD$ y $\angle CDB$ son iguales. Entonces

$$\angle CBD + \angle CDB + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow 2\angle CBD + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle CBD = 20^\circ$$

Entonces $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Con lo que la respuesta es $\boxed{40^\circ}$.

2.2.3 NIVEL 3

Solución del problema 1: Véase la solución del problema 3 del nivel 2.

Solución del problema 2: Véase la solución del problema 7 del nivel 1.

Solución del problema 3: Véase la solución del problema 5 del nivel 2.

Solución del problema 4:

Caso 1: No hay fundas vacías. Entonces una funda deberá tener exactamente 2 frutas. El número de formas de escoger 2 frutas, que estarán en la misma funda, de 4 es $\binom{4}{2} = 6$.

Caso 2: Hay una funda vacía. Hay dos casos: una fruta en una funda y tres en otra ó dos frutas en una funda y dos en otra. En la primera habrá $\binom{4}{1} = 4$ formas de escoger la fruta que no compartiría funda. En la segunda, hay $\binom{4}{2} = 6$ de escoger una pareja de frutas, la pareja restante iría en otra funda.

Caso 3: Hay dos fundas vacías. Entonces sólo habría una forma de colocar las frutas, cuando todas las frutas están en la misma funda.

Entonces hay $6+4+6+1 = 17$ formas de colocar las frutas en la funda, con lo que la respuesta es $\boxed{17}$.

Solución del problema 5: Véase la solución del problema 12 del nivel 2.

Solución del problema 6: Se sabe que $n+1 \mid n^2+3 \Rightarrow n+1 \mid n^2+3-(n+1)(n-1)$ de donde $n+1 \mid n^2+3-(n^2-1) \Rightarrow n+1 \mid 4$, por lo que $n+1$ sería $1, 2$ o 4 al ser $n+1$ entero positivo. Entonces n sería $0, 1, 3$, pero como n no puede ser 0, las únicas soluciones son $n = 1, 3$.

Caso 1: Si $n = 1 \Longrightarrow 2 \mid 4$

Caso 2: Si $n = 3 \Longrightarrow 4 \mid 12$

Con lo que la respuesta es $\boxed{2}$.

Solución del problema 7: Véase la solución del problema 14 del nivel 1.

Solución del problema 8: Véase la solución del problema 14 del nivel 2.

Solución del problema 9: Sea x y y las respuestas correctas e incorrectas, respectivamente. Por dato, $7x-2y = 87$, $x+y \leq 20$. x debería ser un número impar para que $7x-2y$ sea impar. Así mismo, $7x \geq 87$, por lo que $x \geq 13$.
Si $x = 13$, $y = \frac{7\cdot 13-87}{2} = 2$. Entonces no respondió $20-13-2 = 5$ preguntas.
Si $x \geq 15$, $y \geq \frac{7\cdot 15-87}{2} = 9$, pero $x+y \geq 15+9 = 24 < 20$. Lo que representa una contradicción con lo antes asumido.
Con lo que la respuesta es $\boxed{5}$.

Solución del problema 10: Se n un número con 15 divisores. Sea $P(n)$ la cantidad de divisores de n y $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots P_k^{\alpha_k}$ su representación canónica. Se sabe que

$$P(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$$

Como $P(n) = 15 = 3\cdot 5$, n a lo mucho tiene 2 divisores primos.
Si $n = P_1^{14}$. Para que n sea mínimo, $P_1 = 2$, entonces $n = 16384$.
Si $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2}$. Para que n sea mínimo, $P_1 = 2$ y $P_2 = 3$. Así mismo, $\alpha_1 = 4$ y $\alpha_2 = 2$, entonces $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Con lo que la respuesta es $\boxed{144}$.

Solución del problema 11: Sea $\angle BAC = 2\alpha$ y $\angle ACB = 2\beta$. En el triángulo $\triangle ABC$

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 112^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 56^\circ$$

Se sabe que AI es bisectriz de $\angle BAC$, entonces $\angle IAC = \frac{\angle BAC}{2} = \alpha$. Así mismo, CI es bisectriz de ACB, por lo que $\angle ICA = \frac{\angle ACB}{2} = \beta$.
En el triángulo ΔAIC

$$\angle IAC + \angle ICA + \angle AIC = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \angle AIC = 180^\circ \Rightarrow 56^\circ + \angle AIC = 180^\circ \Rightarrow \angle AIC = 124^\circ$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{124^\circ}$.

Solución del problema 12: $13 \cdot 17 = 221$ no es múltiplo de $2, 3, 5, 7$ ni 11, por lo que es el número que Sebastián le dió a Anthony. Con lo que la respuesta es $\boxed{221}$.

Solución del problema 13: Restamos las dos expresiones.

$$\begin{aligned} a^2 - 1 - (b^2 - 1) &= b - a \\ \Rightarrow a^2 - 1 - b^2 + 1 &= b - a \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= b - a \\ \Rightarrow (a-b)(a+b) &= -(a-b) \\ \Rightarrow (a-b)(a+b) + (a-b) &= 0 \\ \Rightarrow (a-b)(a+b+1) &= 0 \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, $a + b + 1 = 0$. Entonces $b = -a - 1$. Remplazamos b en la primera expresión.

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= -a - 1 \\ a(a+1) &= 0 \\ a = 0 \quad &\vee \quad a = -1 \end{aligned}$$

Si $a = 0$, $b = -a - 1 = -1$. Entonces $-(a^3 + b^3) = -(0^3 + (-1)^3) = -(-1) = 1$.
Si $a = -1$, $b = -a - 1 = 0$. Entonces $-(a^3 + b^3) = -((-1)^3 + 0^3) = -(-1) = 1$.
Con lo que la respuesta es $\boxed{1}$.

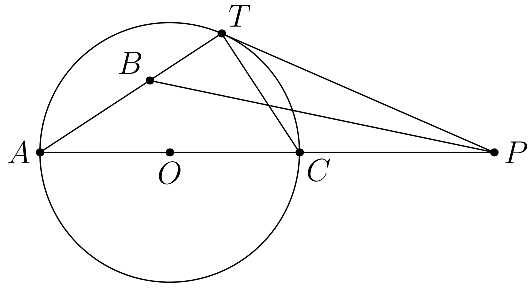
Solución del problema 14: El conjunto $1, 2, 3, \ldots, 10$ se lo divide en dos subconjuntos disjuntos A y A^C. Sólo uno de los subconjuntos tiene la suma de sus elementos mayor a 27.

Por contradicción: Supongamos que en A y en A^C, la suma de sus elementos es menor o igual a 27, entonces la suma de los elementos de $A \cup A^C$ sería menor o igual a $2 \cdot 27 = 54$. Pero $A \cup A^C$ es el conjunto $1, 2, 3, \ldots, 10$ y su suma es $\frac{10 \times 11}{2} = 55$, lo que es una contradicción.

Así mismo si los dos subconjuntos A y A^C, la suma de sus elementos fuera mayor a 27, la suma de los elementos de $A \cup A^C$ sería mayor o igual a $2 \cdot 28 = 56$. Lo que representa una contradicción a lo antes asumido.

Entonces por cada subconjunto con suma menor o igual a 27, habrá un subconjunto con suma mayor a 27 (que será su complemento), entonces la mitad de los subconjuntos de $1, 2, 3, \ldots, 10$ tendrá su suma mayor a 27. Se sabe que en un conjunto de 10 elementos, hay 2^{10} subconjuntos, como sólo la mitad cumple que la suma de sus elementos es mayor a 27, habría $\frac{2^{10}}{2} = 2^9 = 512$ subconjuntos. Con lo que la respuesta es $\boxed{512}$.

Solución del problema 15: Sea C el punto de intersección entre AP y la circunferencia con centro O, $(A \neq C)$.



Veamos que AC es diametro de donde $\angle ATC = 90^\circ$. PT es tangente al círculo, por ángulo semi-inscrito $\angle PTC = \angle TAC = \alpha$.

Sea $\angle TPC = 2\beta$, como PB es bisectriz del ángulo $\angle TPA$, $\angle TPB = \beta$. Por otro lado

$$\angle ACT = \angle PTC + \angle TPC = \alpha + 2\beta$$

En el triángulo $\triangle TAC$ se tiene

$$\angle TAC + \angle ACT + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \alpha + 2\beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

En $\triangle TBC$ se tiene

$$\angle TBP + \angle TPB + \angle PTB = 180^\circ \Rightarrow \angle TBP + \angle TPB + (\angle PTC + \angle ATC) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TBP + \beta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle TBP = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ$$

Con lo que la respuesta es $\boxed{45^\circ}$.

2.3 TERCERA FASE

2.3.1 NIVEL 1

Solución del problema 1: Sea T el peso del tonel vacío y V el peso del vino cuando el tonel está lleno, entonces $T+V=265$ y $T+\frac{T}{2}=160$.
Como se pide el valor de T

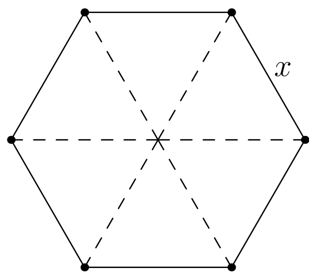
$$T = 2\left(T+\frac{T}{2}\right)-(T+V) = 2\times 160-265 = 55$$

es decir, el peso del tonel vacío es 55 kg.

Solución del problema 2: Hay $2^4=16$ listas binarias. 4 de ellas tienen exactamente un 1: 1000, 0100, 0010 y 0001 y una lista no contiene ningún uno: 0000. Por lo tanto hay $16-4-1=11$ listas binarias de longitud 4 que tienen al menos dos unos.

Solución del problema 3: No es posible pues la cantidad de pedazos en cada turno se va multiplicando por 10, de esta manera en cada turno la cantidad de pedazos es un número de la forma 10^k con $k\geq 2$, pero esto no es divisible para 9, ya que estos números tiene la forma 100...0 con un total de k dígitos iguales a 0, pero según el criterio de divisibilidad por 9, como la suma de estos dígitos (es igual a 1) no es múltiplo de 9 entonces el número nunca será múltiplo de 9, y así no se podrá compartir la pizza entre los 9 amigos.

Solución del problema 4: Es conocido que si unimos los vertices de un hexágono regular con el centro, se forman 6 triángulos equiláteros de lado x.



Un triángulo equilátero de lado x tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Entonces

$$\text{Área}(\text{Hexágono}) = \text{Perímetro}(\text{Hexágono})$$
$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 6x$$

Como $x\neq 0$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Por lo que la respuesta es $3\sqrt{3}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 4$.

Solución del problema 5: Se tiene que

$$\begin{aligned} n! &= 7!\times 3!\times 5! \\ &= 7!\times(1\times 2\times 3)\times(1\times 2\times 3\times 4\times 5) \\ &= 7!\times(2\times 4)\times(3\times 3)\times(2\times 5) \\ &= 7!\times 8\times 9\times 10 \\ &= 10! \end{aligned}$$

luego $n=10$.

Solución del problema 6: Dado que no pueden haber 2 reinas en la misma fila o columna, hay exactamente 1 reina en cada fila o columna. Se analizarán las configuraciones posibles de las 5 reinas dependiendo de donde se encuentra la reina que va en la tercera fila.

Caso 1: Esta reina se encuentra en la primera columna.
En este caso solo hay dos formas de poner las reinas de la columna 2 y 3, y en cada caso se genera una única configuración descritas en la Pareja 1.

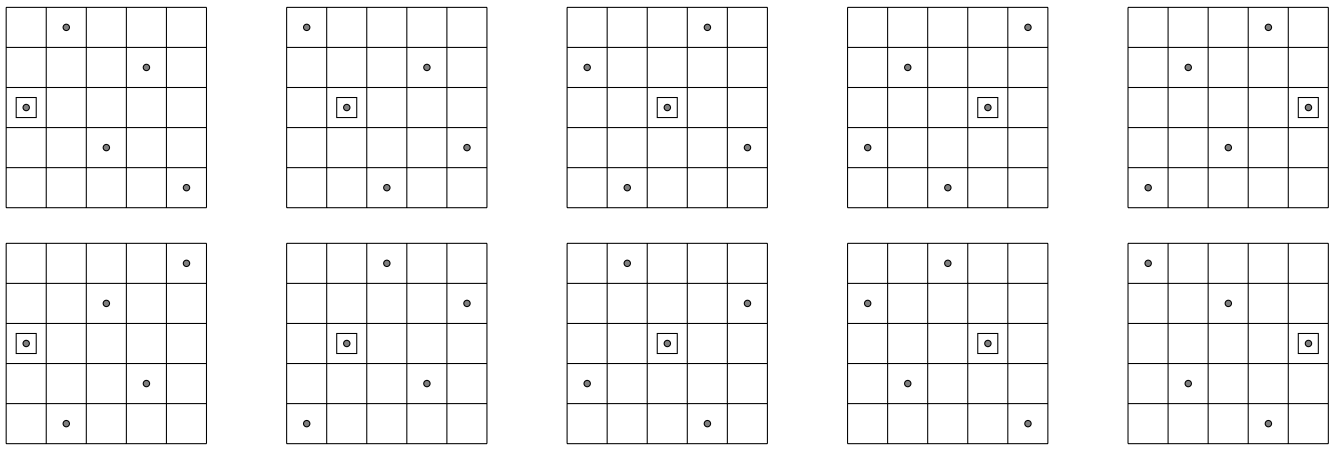
Caso 2: Esta reina se encuentra en la segunda columna.
En este caso solo hay dos formas de poner las reinas de la columna 1 y 3, y en cada caso se genera una única configuración descritas en la Pareja 2.

Caso 3: Esta reina se encuentra en la tercera columna.
En este caso solo hay dos formas de poner las reinas de la columna 2 y 4, y en cada caso se genera una única configuración descritas en la Pareja 3.

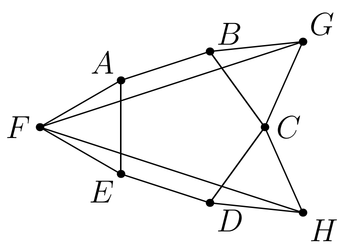
Caso 4: Esta reina se encuentra en la cuarta columna.
En este caso solo hay dos formas de poner las reinas de la columna 3 y 5, y en cada caso se genera una única configuración descritas en la Pareja 4.

Caso 5: Esta reina se encuentra en la quinta columna.
En este caso solo hay dos formas de poner las reinas de la columna 3 y 4, y en cada caso se genera una única configuración descritas en la Pareja 5.

Pareja 1 Pareja 2 Pareja 3 Pareja 4 Pareja 5



Solución del problema 7: Veamos que $\angle FAB = \angle GBA = 60^\circ + \frac{180^\circ(5-2)}{3} = 108^\circ$, ya que ambos se forman a partir de los ángulos de los triángulos equiláteros AEF y BCG, así como del pentágono regular $ABCDE$, además como $AF = BG$ entonces $ABGF$ es un trapecio isósceles, luego $\angle AFG = 180^\circ - 108^\circ - 60^\circ = 12^\circ$ análogamente $\angle HFE = 12^\circ$.



Finalmente $\angle GFH = 60^\circ - 2 \cdot 12^\circ = 36^\circ$.

2.3.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: Exactamente uno entre $X, X+1$ y $X+2$ es divisible para 3 ya que son 3 números enteros consecutivos, luego uno de ellos es múltiplo de 3, pero 3 es el único número primo múltiplo de 3, con lo que hay tres opciones:

- $X = 3$ entonces $X+1 = 4$ que no es primo, entonces no hay solución aquí.
- $X+1 = 3$ entonces $X+2 = 4$ que no es primo, entonces no hay solución aquí.
- $X+2 = 3$ entonces $X = 1$ que no es primo, entonces no hay solución aquí.

Finalmente se concluye que no existe algún entero positivo X que cumpla las condiciones.

Solución del problema 2: Sabemos que hay 900 números de 3 dígitos. Ahora vamos a contar la cantidad de números de tres dígitos $\overline{abc}$ existen tales que el producto de sus dígitos sea un número impar. Sabemos que $a \times b \times c$ es impar si y solo si a, b y c son impares, es decir que a, b y $c \in \{1,3,5,7,9\}$, por lo que hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ números de 3 dígitos que cumplen esta condición. Entonces hay $900 - 125 = 775$ números de 3 dígitos tal que el producto de sus dígitos es par.

Solución del problema 3: El triángulo en cuestión claramente es un triángulo rectángulo.

Como 3 y 4 son sus catetos, sabemos que el área del triángulo es $\frac{3\cdot 4}{2} = 6$. Si usamos la hipotenusa 5 como base podemos conseguir la tercera altura

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura} \\ 6 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h \\ h &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Como las alturas del triángulo rectángulo son 3, 4 y $\frac{12}{5}$, es fácil ver que la más pequeña es $\frac{12}{5}$.

Solución del problema 4: Como n es el producto de dígitos, entonces todos sus factores primos deben ser menores que 10, por este motivo descartamos los casos $n = 130 = 2 \times 5 \times 13$ y $n = 132 = 2^2 \times 3 \times 11$.

Si $n = 128$, entonces n es el producto de dígitos que son potencias de 2 y en consecuencia $n \leq 1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$ lo cual es una contradicción. Por otro lado, el producto de los dígitos de 279 es igual a $2 \times 7 \times 9 = 126$ y el producto de los dígitos de 359 es igual a $3 \times 5 \times 9 = 135$.

Por lo tanto, solo 126 y 135 son posibles valores de n.

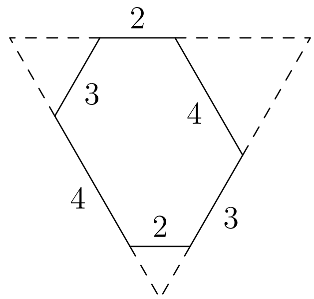
Solución del problema 5: Veamos que los números que se forman son $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ y $\overline{cba}$. Sabemos además que $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, haciendo esto con cada número obtenemos que

$$1554 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a+b+c)$$

De donde $a + b + c = 7$.

Asumamos sin perdida de generalidad que $a > b > c$. Si $a \geq 2$ llegamos a que $7 = a + b + c \geq 4 + 3 + 2 = 9$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $c = 1$ y como es el menor la respuesta es 1.

Solución del problema 6: Como todos lo ángulos internos son iguales, entonces todos sus ángulos externos también lo son. Esto significa que cada ángulo externo es igual a $60°$.
Se procede a completar el triángulo equilátero como muestra la figura.



El área del hexágono sería igual al área del triángulo equilátero grande de lado 9, menos las áreas de los triángulos equiláteros pequeños. Por lo tanto, el área del hexágono es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}9^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}3^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(9^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2) = 13\sqrt{3}$$

Por lo que la respuesta es $(13\sqrt{3})^2 = 507$.

Solución del problema 7: Hay dos tipos de triángulos equiláteros, los que tienen la misma orientación que el triángulo grande y los que no. Denotemos por $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, el n-ésimo número triangular.

Primero se contarán los triángulos equiláteros con la misma orientación. Hay T_{10} dichos triángulos de lado 1, T_9 de lado 2, T_8 de lado 3 y así en adelante hasta T_1 de lado 10. Esto da un total de:

$$T_{10} + T_9 + \cdots + T_1 = 55 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 220$$

Para la dirección opuesta, se tienen T_9 triángulos de lado 1, T_7 de lado 2, T_5 de lado 3, T_3 de lado 4 y T_1 de lado 5. Esto da un total de

$$T_9 + T_7 + T_5 + T_3 + T_1 = 45 + 28 + 15 + 6 + 1 = 95$$

Por lo tanto, el número total de triángulos equiláteros es $220 + 95 = 315$.

2.3.3 NIVEL 3

Solución del problema 1:

Solución 1:

Sea x la edad de Diego, entonces

$$x^2 - 224 \times \frac{1}{x^2} = \frac{121}{2}$$

Multiplicando por $2x^2$ y factorizando se obtiene

$$(2x^2+7)(x^2-64) = 0$$

Como $2x^2+7 \neq 0$, entonces $x^2 - 64 = 0$, de donde $x^2 = 64$ y viendo que $x > 0$ ya que es la edad de Diego se conluye que $x = 8$.
Finalmente, dentro de cinco años Diego tendrá $x + 5 = 13$ años.

Solución 2:

Al igual que en la solución 1 se obtiene

$$x^2 - 224 \times \frac{1}{x^2} = \frac{121}{2}$$

Multiplicando por $2x^2$ y colocando todos los términos en el miembro izquierdo de la igualdad se llega a

$$2x^4 - 121x^2 - 448 = 0$$
$$\iff 2(x^2)^2 - 121(x^2) - 448 = 0$$

Luego se puede considerar la expresión anterior como una ecuación cuadrática en x^2 y por la fórmula general se obtiene $x_1^2 = -\frac{7}{2}$ y $x_2^2 = 64$, pero la primera solución no debe ser considerada ya que $x^2 \geq 0$ por lo que $x^2 = 64$ luego $x = \pm 8$ pero como x es la edad de Diego entonces $x = 8$, finalmente, dentro de cinco años Diego tendrá $x + 5 = 13$ años.

Solución 3:

Al igual que en la solución 2 se obtiene

$$2x^4 - 121x^2 - 448 = 0$$

Ahora hay que encontrar las raíces positivas y enteras del polinomio $P(x) = 2x^4 - 121x^2 - 448$ ya que $x \in \mathbb{Z}^+$ por ser la edad de Diego.

Se puede ver que $x = 8$ es una raíz de $P(x)$ ya que $P(8) = 2(8)^4 - 121(8)^2 - 448 = 0$ entonces $(x-8)$ es un factor de $P(x)$, entonces

$$P(x) = (x-8)(2x^3 + 16x^2 + 7x + 56)$$

Pero veamos que $2x^3 + 16x^2 + 7x + 56 > 0$ para todo $x > 0$, entonces la única raíz entera positiva de $P(x)$ es $x = 8$, con lo que es la única solución y finalmente, dentro de cinco años Diego tendrá $x + 5 = 13$ años.

Solución 4:

Al igual que en la solución 2 se obtiene

$$2x^4 - 121x^2 - 448 = 0 \iff 2x^4 - 448 = 121x^2$$

Como $x \in \mathbb{Z}^+$ por ser la edad de Diego entonces $2x^4 - 448$ es par, por lo que $121x^2$ también lo es, luego x^2 debe ser par y así x debe serlo.

Nótese que de $2x^4 - 121x^2 - 448 = 0$ se puede obtener que

$$2x^4 - 121x^2 = 448 \iff x^2\left(2x^2 - 121\right) = 448 \iff x^2\left(2x^2 - 121\right) = 2^6 \cdot 7$$

Entonces $x^2 \mid 2^6 \cdot 7$, pero entonces $\text{mcd}(x,7) = 1$ ya que caso contrario lo anterior sería imposible, luego $x^2 \mid 2^6$, es decir

$$x^2 \in \{2^2, 2^4, 2^6\}$$

Esos son los únicos casos ya que x^2 es un cuadrado perfecto y además ya se obtuvo que x debe ser par.

Ahora se va a analizar cada caso usando la ecuación $2x^4 - 121x^2 = 448$:

Caso 1: $x^2 = 2^2 = 4$. Entonces $2x^4 - 121x^2 = 2(4)^2 - 121(4) \neq 448$.

Caso 2: $x^2 = 2^4 = 16$. Entonces $2x^4 - 121x^2 = 2(16)^2 - 121(16) \neq 448$.

Caso 3: $x^2 = 2^6 = 64$. Entonces $2x^4 - 121x^2 = 2(64)^2 - 121(64) = 448$.

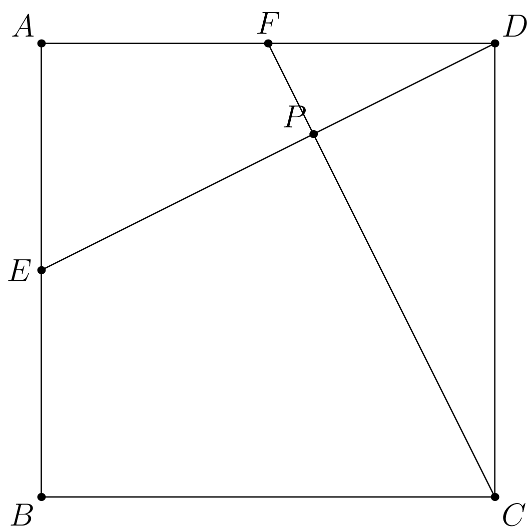
Así se concluye que la única solución es $x = 8$ y finalmente, dentro de cinco años Diego tendrá $x + 5 = 13$ años.

Solución del problema 2: Es claro que los únicos divisores de 2^{2017} son: $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2017}$, cuya suma es $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2017} = \frac{2^{2017+1}-1}{2-1} = 2^{2018} - 1$ (por ser una sucesión geométrica). Y el último dígito de 2^{2018} es el mismo que el de $2^2 = 4$ porque los últimos dígitos de las potencias de dos tienen ciclo de 4. Gracias a esto el último dígito de $2^{2018} - 1$ es 3.

Solución del problema 3: Se sabe que hay 900 números de 3 dígitos. Ahora se va a contar la cantidad de números de tres dígitos $\overline{abc}$ existen tales que el producto de sus dígitos sea un número impar.

Se sabe que $a \times b \times c$ es impar si y solo si a, b y c son impares, es decir que a, b y $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, por lo que hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ números de 3 dígitos que cumplen esta condición. Entonces hay $900 - 125 = 775$ números de 3 dígitos tal que el producto de sus dígitos es par.

Solución del problema 4:



Es claro que $\triangle EAF \equiv \triangle FDC$, por lo que $\angle EDA = \angle FCD = \alpha$ y $ED = FB$. Gracias a esto se tiene que $\angle PDC = 90° - \alpha = 90$, con lo que $\angle DPC = 180° - \angle PCD - \angle PDC = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. Con eso es fácil de ver que $\triangle EAD \simeq \triangle FPD \simeq \triangle DPC \simeq \triangle FDC$, por lo que se deduce que

$$2 = \frac{AD}{EA} = \frac{DP}{PF} = \frac{CP}{PD}$$

La identidad anterior implica que $PD = 2 \cdot PF$, $CP = 4 \cdot PF$, $CF = 5 \cdot PF$ y $EP = ED - PD = 5 \cdot PF - 2 \cdot PF = 3 \cdot PF$, dando por solución

$$\frac{CF}{EP} = \frac{5 \cdot PF}{3 \cdot PF} = \frac{5}{3}$$

Solución del problema 5: Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}&=0\\ \frac{a+b}{ab}+\frac{c+d}{cd}+\frac{1}{abcd}&=0\\ cd(a+b)+ab(c+d)+1&=0\\ cd(-c-d)+ab(c+d)+1&=0\\ (cd-ab)(c+d)&=1\end{aligned}$$

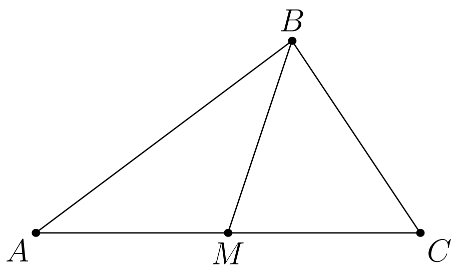
Solución del problema 6: Sean 1,2,3,4,5,6 las actividades, entonces como hay $\binom{6}{2}=15$ maneras de elegir 4 actividades, las dividimos en 5 grupos de la siguiente forma

$$\begin{gathered}\{1234,3456,1256\}\\ \{1235,2456,1346\}\\ \{1236,2345,1346\}\\ \{1245,1356,2346\}\\ \{1246,1345,2356\}\end{gathered}$$

Se puede notar que en cada grupo, cualesquiera dos combinaciones tienen exactamente dos actividades en común, esto quiere decir que de cada grupo se puede elegir a lo más una combinacion de 4 actividades (si se escogen dos combinaciones, habría dos socios que comparten exactamente dos actividades).

Por lo tanto, el máximo número de actividades (al igual que el número de socios) es 5 y un ejemplo que muestra que esto es posible es $1234, 2345, 3451, 4512, 5123$ donde cualesquiera dos socios tienen exactamente 3 actividades en común (y ningún socio realiza la actividad 6).

Solución del problema 7:



Sea $\angle ABM = x$. Entonces $\angle BMC = 2x$. $BC = \frac{2}{3}MC \implies MC = \frac{3}{2}BC$. Dado que M es el punto medio de AC, por lo que $AM = \frac{3}{2}BC$. Entonces $\frac{AM}{AB} = \frac{3\cdot BC}{2\cdot AB}$.

Puesto que $\angle BMC = 2x$, entonces $\angle AMB = 180° - 2x$ luego $\angle BAM = 180° - (180° - 2x + x) = x$. Esto significa que el $\triangle AMB$ es isósceles entonces $AM = MB$. Ahora puesto que $BM = CM$(punto medio) tenemos que $\triangle BMC$ es también isósceles. Entonces $\angle MCB = \angle MBC = 90° - x$. Nótese que

$$\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC = (90° - x) + x = 90°$$

Por lo tanto $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa AC. $AC = 3BC$ así que $AB = \sqrt{9BC^2 - BC^2} = 2BC\sqrt{2}$. Finalmente

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3BC}{2AB} = \frac{3BC}{4BC\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

2.4 FASE FINAL

2.4.1 NIVEL 1

Solución del problema 1: Ya que el día 300 es un martes, cualquier número de días múltiplo de 7 que le agreguemos, seguirá siendo martes.

Si el año N es natural, faltan 65 días para terminarlo, más los 200 días del año $N+1$ totalizan 265 días. Pero 265 es congruente a $-1 \pmod 7$, lo que haría que no fuese martes el día 200 del año $N+1$. Luego deben transcurrir 266 días para que siga siendo martes. 266 es congruente a $0 \pmod 7$, por tanto, faltan 66 días para concluir N, que más los 200 días de $N+1$ hace que siga siendo martes, luego N tiene $300+66=366$ días, por lo que N es bisiesto.

Solución del problema 2: Ya que Beto estuvo 21 veces en cancha, sabemos que Andrés y Cristina estuvieron en la portería un total de 21 veces. Ya que Cristina fue portera 8 veces, Andrés fue portero 21-8=13 veces. Con un razonamiento similar, concluimos que Beto fue portero 4 veces y por lo tanto se jugaron un total 25 partidos. La única forma de que Andrés fuese portero 13 veces en 25 partidos es si comienza siendo portero y luego es portero la mayor cantidad de veces posible. Esto implica que Andrés fue portero en los partidos $1, 3, 5, 7, \cdots$. El jugador que fue portero en el séptimo juego fue el jugador que hizo el sexto gol y por lo tanto Andrés hizo el sexto gol.

Solución del problema 3: Notemos que siempre que el niño come dos frutas del árbol, el número de manzanas disminuirá en 2 o permanecerá constante. De esa forma la paridad del número de manzanas será siempre el mismo.

Como inicialmente se tenía un número impar de manzanas, la cantidad de ellas continuará siendo impar hasta el final. Luego, la última fruta debe ser una manzana.

Solución del problema 4:
Solución 1:
Sea el número de tres dígitos $\overline{abc}$. Se tiene que $a \cdot b \cdot c = 126$ por lo que a, b y c son dígitos que dividen a 126, de donde $a, b, c \in \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Además $b + c = 11$ y como b y c pertenecen a ese conjunto eso solo pasa si $\{b, c\} = \{2, 9\}$, gracias a esto $a = \frac{126}{b \cdot c} = \frac{126}{2 \cdot 9} = 7$.

Solución 2:
Sea el número de tres dígitos $\overline{abc}$. Se tiene que $b + c = 11$, entonces

$$(b, c) \in \{(2, 9); (3, 8); (4, 7); (5, 6); (6, 5); (7, 4); (8, 3); (9, 2)\}$$

Como $a \cdot b \cdot c = 126$ entonces $b \cdot c$ es un divisor de 126, por lo que se puede demostrar fácilmente que

$$(b, c) \notin \{(3, 8); (4, 7); (5, 6); (6, 5); (7, 4); (8, 3)\}$$

Ya que sus respectivos productos son $24, 28, 30, 30, 28, 24$ y ninguno es un divisor de 126, por lo que $(b, c) \in \{(2, 9); (9, 2)\}$, y así se concluye que $a = \frac{126}{2 \cdot 9} = 7$.

Solución del problema 5: Se usará el principio fundamental del conteo a lo largo de la solución.

Inicialmente se tienen $9 \times 3 \times 4 = 108$ placas. De acuerdo con el problema, se tienen las siguientes opciones para el nuevo número de placas: $10 \times 4 \times 4 = 160$, $9 \times 4 \times 5 = 180$ y $10 \times 3 \times 5 = 150$.

Luego, el número máximo es 180 y ocurre cuando las nuevas opciones son adicionadas en la segunda y tercera letras.

Solución del problema 6: Se puede empezar estudiando los ángulos dentro del cuadrado $AYZC$ indicando que sus ángulos internos son iguales a $90°$. Además, dado que $\triangle ABC$ es equilátero, cada uno de sus ángulos internos es $60°$. Entonces, $\angle BAY = \angle CAY - \angle CAB = 30°$. Adicionalmente, como ZA es una diagonal del cuadrado, entonces $\angle ZAY = 45°$.

Ahora analicemos el otro cuadrado $AWXB$. Tenemos que $\angle BAX = 45°$ dado que AX es una diagonal. Por consiguiente, $\angle ZAX = \angle ZAY - \angle BAY + \angle BAX = 60°$.

Como $\triangle ABC$ tiene sus lados iguales, entonces los cuadriláteros $AYZC$ y $AWXB$ son congruentes, lo que implica que sus respectivas diagonales AX y AZ son de la misma longitud. Entonces $\triangle AXZ$ es isósceles.

Se concluye que $\triangle AXZ$ es equilátero, porque tiene dos lados iguales y el ángulo entre ellos es $60°$.

2.4.2 NIVEL 2

Solución del problema 1: El monstruo se despierta en años múltiplos de 9 ya que inicialmente se despertó en un año múltiplo 9 y luego se despierta en años sumando suma de los dígitos del año. Por lo tanto, el único año que se puede despertar entre 2005 y 2015 es 2007 (el único múltiplo de 9 en ese rango). Notamos que la suma de los dígitos de cualquier número menor a 2007 es a lo mucho 28 pues podemos tener 1 + 9 + 9 + 9. Por esta razón, si el monstruo se despertó en 2007, se tuvo que haber despertado en alguno de los años entre 2007 - 28 = 1979 y 2007 - 9 = 1998 que son múltiplos de 9: 1980, 1989, 1998. Sin embargo,

$$1980 + 1 + 9 + 8 + 0 = 1998$$

$$1989 + 1 + 9 + 8 + 9 = 2016$$

$$1998 + 1 + 9 + 9 + 8 = 2025$$

y por lo tanto no se pudo haber despertado en el 2007.
Si el monstruo llega en los siguientes 10 años, tendría que llegar en el 2025 (el siguiente múltiplo de 9 después de 2017).
Para que esto suceda, el monstruo debe llegar en algún múltiplo de 9 entre 2016 - 28 = 1988 y 2016. De hecho, el monstruo tiene que llegar a algún número de un intervalo de longitud 28 pues la máxima suma de dígitos es 28. Vemos que

$$1989 + 1 + 9 + 8 + 9 = 2016$$

$$1998 + 1 + 9 + 9 + 8 = 2025$$

$$2007 + 2 + 0 + 0 + 7 = 2016$$

$$2016 + 2 + 0 + 1 + 6 = 2025$$

En cualquier de los 4 casos llegamos a 2025 directamente o a 2016 y luego a 2025 así que el monstruo llegará con seguridad en 2025.

Solución del problema 2: Se multiplica por x la segunda ecuación y la restamos de la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x^2 + 3y - 3x - xy &= 0 \\ (x-3)(x-y) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces se obtiene que $x = 3$ o $x = y$ los cuales se trabajan como casos separados.

Si $x = 3$, reemplazando en cualquiera de la ecuaciones se obtendrá $y = \frac{1}{3}$.

Si $x = y$, reemplazando en la primera ecuación se obtiene

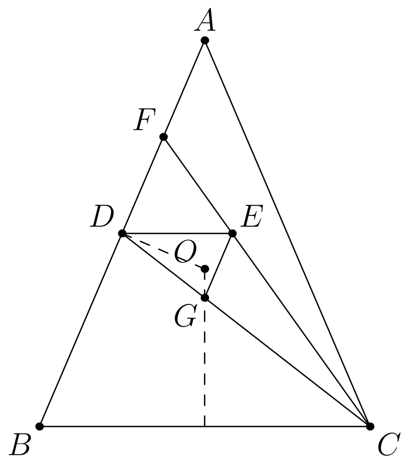
$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 10 \\ x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ (x-2)(x+5) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $x = 2$ o $x = -5$, las cuales como $x = y$ se obtiene que $y = 2$ y $y = -5$, respectivamente.

Luego de confirmar que satisfacen las ecuaciones originales, se concluye que las tres soluciones son

$$(x, y) \in \left\{ \left(3, \frac{1}{3}\right), (2, 2), (-5, -5) \right\}$$

Solución del problema 3: La altura de A y la mediana CD se cortan en G, que es el baricentro de ABC.



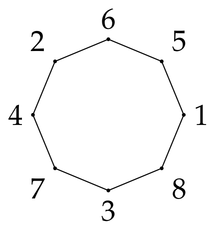
G está en CD y $\frac{DG}{CG} = \frac{1}{2}$, así mismo E está en la mediana CF del triángulo ACD y $\frac{EF}{CE} = \frac{1}{2}$, entonces $\triangle CEG \sim \triangle CDF$ de donde $AB \parallel EG$, y como O está en la mediatriz de AB entonces $DO \perp AB$, luego $DO \perp EG$.

Por otro lado se tiene que $\frac{DF}{BD} = \frac{1}{2} = \frac{EF}{CE}$, entonces así como en el análisis anterior se tiene que $DE \parallel BC$, y como O está en la mediatriz de BC, así como también se tiene que G está en la mediatriz de BC, por ser ABC isósceles, entonces $GO \perp BC$, luego $GO \perp DE$.

Entonces GO y DO son alturas en el triángulo DEG, luego O es el ortocentro de dicho triángulo y así GO también es altura, con lo que se puede concluir que $CD \perp EO$.

Solución del problema 4:

a) Sí es posible, los números los podemos colocar tal y como se muestra en la siguiente figura:



b) Se va a demostrar que no se puede por reducción al absurdo. Supongamos que sí se puede escribir.

Sean $a_1, a_2, ..., a_8$ los números escritos en cada vértice, en sentido horario. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &\geq 14 \\ a_2 + a_3 + a_4 &\geq 14 \\ &\vdots \\ a_7 + a_8 + a_1 &\geq 14 \\ a_8 + a_1 + a_2 &\geq 14 \end{aligned}$$

Luego sumando todas las inecuaciones se obtiene

$$3(a_1 + a_2 + ... + a_8) \geq 8 \cdot 14 = 112$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_8 \geq \frac{112}{3} \tag{1}$$

Pero $a_1 + a_2 + ... + a_8 = 1 + 2 + ... + 8 = 36$, reemplazando en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} 36 &\geq \frac{112}{3} \\ \iff & 36 \cdot 3 \geq 112 \\ \iff & 108 \geq 112 \end{aligned}$$

Pero lo anterior es falso, por lo que se ha llegado a una contradicción y así se puede concluir que no es posible escribir los enteros y cumplir lo requerido.

Solución del problema 5: Primero se observa que la descomposición en factores primos de 8775 es $3^3 \times 5^2 \times 13$. Además, si un número no es coprimo con un número primo p, entonces n es múltiplo de p. Luego, si n es múltiplo de $195 = 3 \times 5 \times 13$ entonces n no es coprimo con ningún elemento de C, porque cada elemento de C contiene al menos uno de los factores primos 3, 5 o 13.

Se va a demostrar que $k \geq 195$, entonces no es posible conseguir dicho conjunto. En efecto, si un conjunto está formado por $k \geq 195$ enteros consecutivos entonces uno de ellos es múltiplo de 195 y este número no es coprimo con ningún elemento de C.

Para demostrar que $k = 194$ es el mayor valor posible, bastaría entontrar un ejemplo. Sea el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 194\}$ y se considera que m es uno de sus elementos, entonces m no es múltiplo de 195, kuego, m no es múltiplo de alguno de los números primos 3, 5 o 13. Luego, m es coprimo con alguno de estos números primos que pertenen a C.

Queda demostrado que el mayor valor posible de k es 194.

Solución del problema 6: Sea $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p^2 - p + 1 = q^3$, entonces

$$\begin{aligned} p^2 - p &= q^3 - 1 \\ \iff & p(p-1) = (q-1)\left(q^2 + q + 1\right) \end{aligned}$$

De donde $p \mid q - 1$ o $p \mid q^2 + q + 1$.

Caso 1: $p \mid q - 1$.

$$\Rightarrow p \leq q - 1 \Rightarrow p < q$$

Pero es claro que $q < q^2 + q + 1$

$$\Rightarrow p < q^2+q+1 \Rightarrow p-1 < q^2+q+1 \Rightarrow p(p-1) < (q-1)(q^2+q+1) \Rightarrow p(p-1) \neq (q-1)\left(q^2+q+1\right)$$

Entonces no hay solución en este caso.

Caso 2: $p \mid q^2 + q + 1$.
Entonces existe un entero no negativo n tal que $q^2 + q + 1 = np$

$$\Rightarrow p(p-1) = (q-1)(np) \Rightarrow p - 1 = (q-1)n \Rightarrow p = 1 + n(q-1)$$

Luego

$$\begin{aligned} q^2 + q + 1 &= np \\ \iff & q^2 + q + 1 = n\left(1 + n(q-1)\right) \\ \iff & q^2 + q + 1 = n + n^2 q - n^2 \\ \iff & q^2 + q + 1 - n - n^2 q + n^2 = 0 \\ \iff & q^2 + q\left(1 - n^2\right) + n^2 - n + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se considera la última ecuación como una cuadrática en q, entonces su discriminante debe ser un cuadrado perfecto para que q pueda ser entero, ya que caso contrario los valores de q no serían racionales.

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(1-n^2\right)^2 - 4(1)\left(n^2-n+1\right)\\ &= 1-2n^2+n^4-4n^2+4n-4\\ &= n^4-6n^2+4n-3\end{aligned}$$

Pero veamos que $\Delta \leq 0$ si $n \in \{0,1,2\}$ luego $n^4-6n^2+4n-3 \geq n^4-6n^2+9 = \left(n^2-3\right)^2$, y ahora se va a demostrar que $n^4-6n^2+4n-3 < \left(n^2-2\right)^2$.

$$\begin{aligned}&\iff n^4-6n^2+4n-3 < n^4-4n^2+4\\ &\iff 4n^2-6n^2+4n-3-4<0\\ &\iff -2n^2+4n-7<0\\ &\iff 4n^2-8n+14>0\\ &\iff (2n^2-2)^2+10>0\end{aligned}$$

Lo cuál es evidentemente cierto, entonces

$$\left(n^2-3\right)^2 \leq \Delta < \left(n^2-2\right)^2$$

De donde $\Delta = \left(n^2-3\right)^2$, pero no es difícil obtener que esta igualdad se cumple solo si $n=3$, entonces la ecuación cuadrática queda

$$\begin{aligned}&q^2+q(-8)+(3)^2-(3)+1=0\\ &\iff q^2-8q+7=0\\ &\iff (q-1)(q-7)=0\\ &\Rightarrow q=7\\ &\Rightarrow (7)^2+(7)+1=(3)p\\ &\Rightarrow 49+7+1=3p\\ &\Rightarrow 57=3p\\ &\Rightarrow p=19\end{aligned}$$

Con lo que la única solución es $p=19$.

2.4.3 NIVEL 3

Solución del problema 1:

Solución 1:

Del 6 de junio de 1944 al 6 de junio de 2017 han transcurrido exactamente 73 años.

El número de años bisiestos entre estas dos fechas es una progresión aritmética de razón 4, a la que habrá que ajustar en el caso de que contenga un año secular no bisiesto, o por otra razón distinta, como en este problema. Luego, de 1944 a 2016 hay $\frac{2016-1944}{4}+1=\frac{72}{4}+1=18+1=19$ años bisiestos.

Pero, el año 1944 no necesita ser contado, puesto que el 6 de junio es posterior al 29 de febrero, por ende, solo se tienen 18 años bisiestos que considerar en el problema, se debe recordar que, a una fecha dada, digamos el domingo d, le agregamos un cierto número de días N, la nueva fecha es:

- Domingo, si $N \equiv 0 \pmod 7$
- Lunes, si $N \equiv 1 \pmod 7$
- Martes, si $N \equiv 2 \pmod 7$
- Miércoles, si $N \equiv 3 \pmod 7$
- Jueves, si $N \equiv 4 \pmod 7$
- Viernes, si $N \equiv 5 \pmod 7$
- Sábado, si $N \equiv 6 \pmod 7$

Sea x el número de días que han transcurrido desde el 6 de junio de 1944 hasta el 7 de diciembre de 2017.

Hasta el 6 de junio de 2017:

$$\begin{aligned} x &\equiv 73(365)+18(1) \pmod 7 \\ &\equiv 3(1)+4(1) \pmod 7 \\ &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

Es decir, este año el 6 de junio cayó el mismo día que el 6 de junio de 1944.

Desde el 6 de junio de 2017 al 7 de diciembre del mismo año han transcurrido: $24+31+31+30+31+30+7=184$ días Luego $x \equiv 0+184 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$ Por tanto, $x=7k+2$ Ya que $7k+2$ es jueves, se infiere que $7k+1$ es miércoles y $7k$ es martes. Por consiguiente, el 6 de junio de 1944 fue martes.

Solución 2:

Es perfectamente admisible hacer uso de la congruencia de Zeller. No se pide la demostración de la "fórmula" que halló el matemático Zeller, que es un alarde de ingenio, sino la forma de aplicarla apropiadamente. Zeller, retomando parte del calendario juliano inicia el año en marzo, así enero y febrero pasan a ser los meses 11 y 12, respectivamente, devolviendo la coherencia a los meses septiembre, octubre, noviembre y diciembre, que vuelven a ser el séptimo, octavo, noveno y décimo del año, como su nombre sugiere. Pero la clave de esta "fórmula" es que el 29 de febrero lo manda al final del año.

Así

$$x=d+[2.6m-0.2]+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c$$

Donde [ ] es la función "piso" y se asume que la fecha cuyo día necesitamos determinar está en el formato day/month/year (De ahí, las letras).

El año se separa en dos partes: los 2 primeros dígitos denotan el siglo, la centuria (c), y los dos últimos denotan el año (y). Los meses (m) reciben un número de 1 a 12, comenzando por marzo (1), abril (2), mayo

(3), ... y terminando en enero (11), febrero (12). El día simplemente es d.

En nuestro caso, el 6 de junio de 1944, corresponde a $c = 19$, $y = 44$, $m = 6 - 2 = 4$, $d = 6$. Luego

$$\begin{aligned} x &= 6 + [2.6(4) - 0.2] + 44 + \left[\frac{44}{4}\right] + \left[\frac{19}{4}\right] - 2(19) \\ &= 6 + [10.4 - 02] + 44 + 11 + 4 - 38 \\ &= 6 + 10 + 21 \\ &= 37 \end{aligned}$$

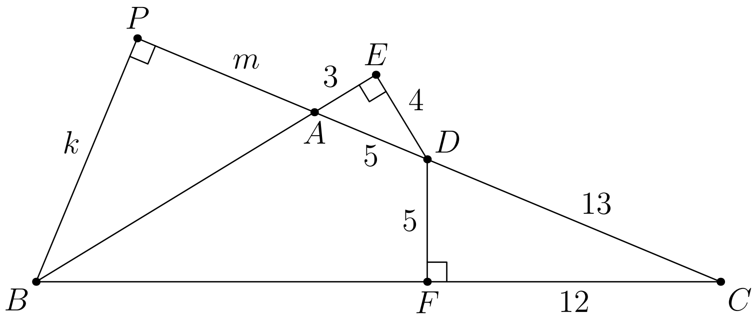
Igual que en la primera solución $x \pmod 7$ da un residuo entre 0 y 6, donde 0 corresponde al primer día de la semana que es domingo y 6, al último, que es sábado.

Pero $37 \equiv 2 \pmod 7$, por tanto, fue martes.

Solución del problema 2: El problema tiene varias configuraciones dependiendo donde se encuentren los pies E y F de las perpendiculares trazadas desde D hacia AB y BC respectivamente.

Caso 1: E queda fuera del segmento AB.

Rápidamente notamos que $DC = 13$, y aplicando Teorema de Pitágoras en $\triangle AED$ y $\triangle DFC$ se tiene que $AE = 3$ y $FC = 12$. Sea P la perpendicular desde B hasta AC, sean k y m a las longitudes de BP y PA respectivamente. El problema pide encontrar el área de ABC que es $\frac{AC \cdot PB}{2} = 9k$.



Los triángulos DFC, BPC son semejantes por ser rectángulos y compartir un ángulo en común. Los triángulos APB, AED son también semejantes por las mismas razones. Entonces,

$$\frac{5}{k} = \frac{12}{18 + m}, \frac{4}{k} = \frac{3}{m} \implies k = \frac{120}{11} \implies \text{Área} = \frac{1080}{11}$$

Caso 2: Ambas perpendiculares caen dentro de los segmentos.

Rápidamente se observa que $DC = 13$, y aplicando Teorema de Pitágoras en $\triangle AED$ y $\triangle DFC$ se tiene que $AE = 3$ y $FC = 12$.

Lema: *El ángulo $\angle CBA$ es obtuso.*

Demostración del Lema: El cuadrilátero $BFDE$ es tiene dos ángulos rectos opuestos, por lo tanto es cíclico. Lo anterior implica que $\angle CBA = \angle ADE + \angle FDC$. Todos los ángulos considerados están entre 0° y 180°, en este intervalo la función coseno es inyectiva, por lo tanto

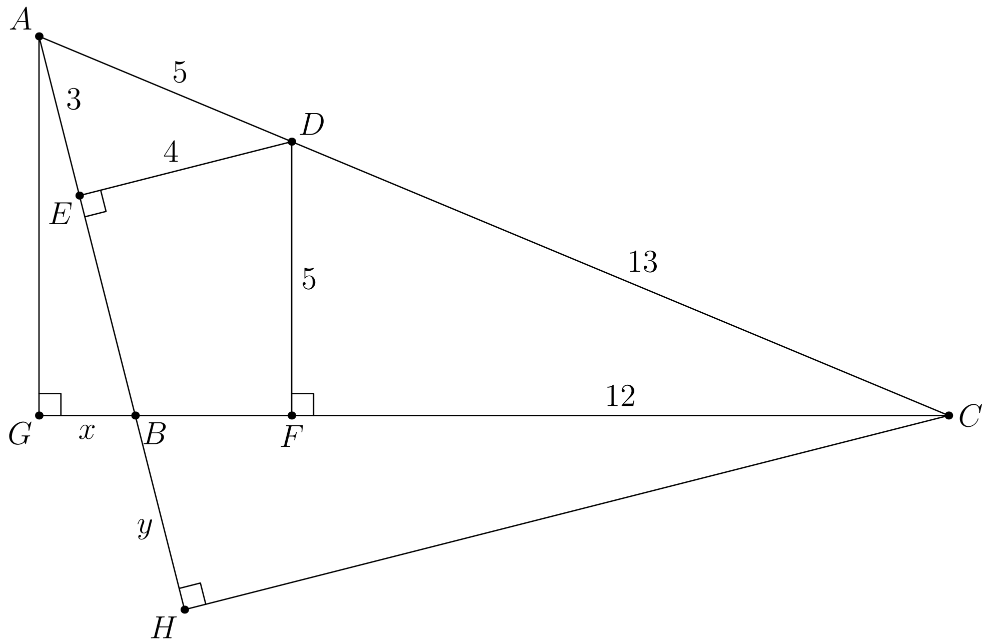
$$\angle CBA = \angle ADE + \angle FDC \iff \cos(\angle CBA) = \cos(\angle ADE + \angle FDC)$$

Lo anterior reduce el problema a demostrar que $\cos(\angle ADE + \angle FDC) < 0$. Aplicando fórmula de suma de ángulos:

$$\begin{aligned}\cos(\angle ADE + \angle FDC) &= \cos(\angle ADE)\cos(\angle FDC) - \sin(\angle ADE)\sin(\angle FDC)\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\\ &= -\frac{16}{65} < 0\end{aligned}$$

Con lo que se finaliza la demostración del Lema.

Sean G y H las perpendiculares desde A y C hacia BC y AB respectivamente. Como $\angle CBA > 90°$ G y H quedan afuera de los segmentos BC y AB. Como tienen 2 ángulos iguales, $\triangle CFD \sim \triangle CGA$, similarmente $\triangle AED \sim \triangle AHC$. Con estas semejanzas se puede fácilmente encontrar que $AG = \frac{90}{13}$, $GF = \frac{60}{13}$,$HC = \frac{72}{5}$, $EH = \frac{39}{5}$. Sean x e y las longitudes de GB y BH respectivamente. El problema pide encontrar el área de ABC que es $\frac{BC\cdot AG}{2} = \frac{45}{13}\left(\frac{216}{13} - x\right)$.



Para encontrar x podemos usar el hecho que $\triangle AGB \sim \triangle CHB$, entonces

$$\frac{\frac{90}{13}}{\frac{72}{5}} = \frac{x}{y}, \; \frac{\frac{90}{13}}{\frac{72}{5}} = \frac{\frac{54}{5} - y}{\frac{216}{13} - x}.$$

Resolviendo el sistema, nos queda $x = \frac{160}{91}$, por lo que

$$\text{Área} = \frac{45}{13}\left(\frac{216}{13} - \frac{160}{91}\right) = \frac{360}{7}$$

Solución del problema 3: La suma mínima de los números de los papeles restantes es

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Entonces $\frac{n(n+1)}{2} \leq 1615$. Pasando el 2 a multiplicar y expandiendo se obtiene $n^2 + n \leq 3230$. Dado que $56^2 + 56 = 3192 < 3230$ y $57^2 + 57 = 3306 > 3230$, se debe cumplir que $n \leq 56$.

La suma máxima de los números de los papeles restantes es

$$(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Entonces $\frac{n(3n+1)}{2} \geq 1615$, lo que implica que $3n^2 + n \geq 3230$. Dado que $3 \cdot 32^2 + 32 = 3104 < 3230$ y $3 \cdot 33^2 + 33 = 3300 > 3230$, se debe cumplir que

$$n \geq 33$$

De los n números removidos, sea k el menor. Entonces la suma de los n números restantes es

$$(1 + 2 + \cdots + 2n) - [k + (k+1) + \cdots + (k+n-1)] = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(2k+n-1)n}{2}$$

Entonces

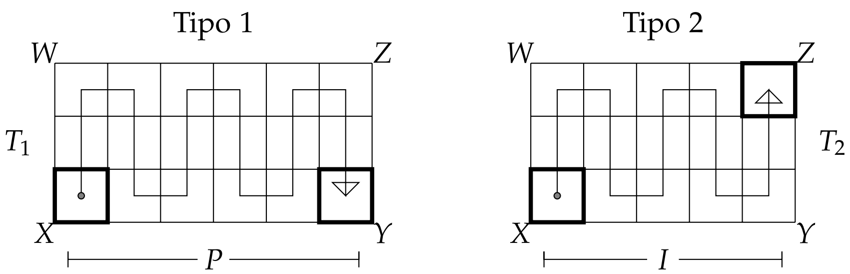
$$\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(2k+n-1)n}{2} = 1615$$

Multiplicando ambos lados para $\frac{2}{n}$ y expandiendo, obtenemos

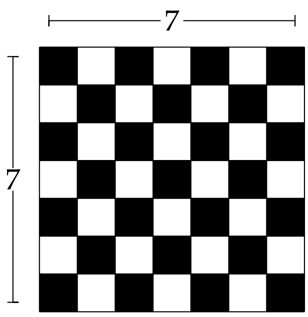
$$\begin{aligned} 4n + 2 - (2k + n - 1) &= \frac{3230}{n} \\ 3n - 2k + 3 &= \frac{3230}{n}. \end{aligned}$$

Como $3n + 2k + 3$ es un entero, $\frac{3230}{n}$ también es un entero. En otras palabras, n es un divisor de 3230. Los divisores de 3230 son: 1, 2, 5, 10, 17, 19, 34, 38, 85, 95, 170, 190, 323, 646, 1615, y 3230. Los únicos factores que están entre 33 y 56 (inclusive) son $n = 34$ y $n = 38$. Los valores de k correspondientes son 5 y 16, respectivamente, los cuales son ambos viables. Entonces los posibles valores de n son 34 y 38.

Solución del problema 4: Notemos las dos configuraciones de rectángulos que en las que se puede encontar la hormiga en cierto momento. En los del Tipo 1, un lado con una cantidas par de casillas (XY), se tiene que la hormiga siempre puede partir de la casilla que está en la esquina X hacia la casilla de la esquina Y recorriendo todas las casillas de dicho rectángulo. En los del Tipo 2, un lado con una cantidas impar de casillas (XY), se tiene que la hormiga siempre puede partir de la casilla que está en la esquina X hacia la casilla de la esquina Z recorriendo todas las casillas de dicho rectángulo.

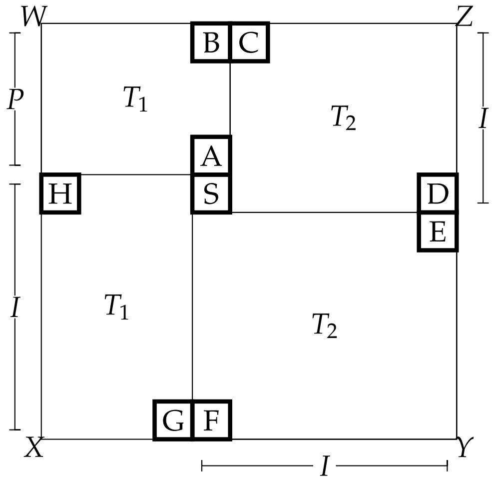


Coloreando el tablero de como un tablero de ajedrez, se puede ver que la hormiga va a cambiar el color de casilla en la que está con cada movimiento que haga. Si la hormiga empieza en una casilla de color blanco y puede recorrer todas las casillas, la cantidad de casillas blancas debe ser igual o superior a la cantidad de casillas blancas (dado que en cada paso cambia el color de la casilla en la que se encuentra), sin embargo, la cantidad de casillas blancas (24) es menor a la cantidad de casillas negras (25) en este tipo de tablero. Concluyendo así que si la hormiga puede realizar este recorrido necesariamente debe comenzar en una casilla negra.

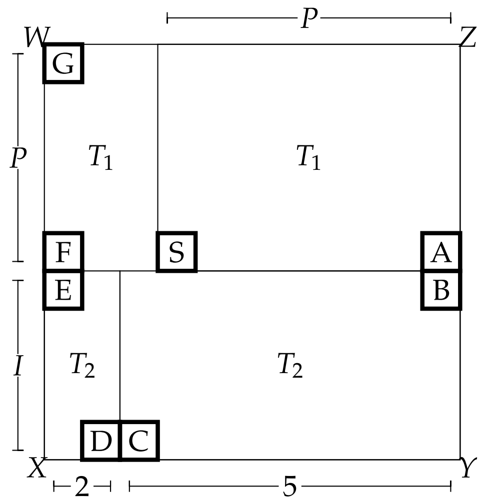


Ahora se asumirá que la hormiga comienza en una de estas casillas negras del tablero. La particularidad que tienen estas casillas es que la paridad de la cantidad de casillas desde la misma hacia todos los bordes es la misma, por lo que se dividirán esto en dos casos y se obtendrá que en ambos es posible que la hormiga cumpla su objetivo.

En el caso de que la cantidad de casillas desde S hacia cada uno de los bordes es par, dos de estos que sean consecutivos deben de ser mayores a 0. Sin pérdida de generalidad se dirá que la cantidad de casillas de S hacia XY e YZ es par y mayor a 0. Gracias a esto siempre se podrá hacer la partición indicada abajo. Con está partición queda claro el camino que la hormiga puede hacer: $S \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$ recorriendo así todos las casillas gracias a los rectángulos de Tipo 1 y 2 previamente mencionados.



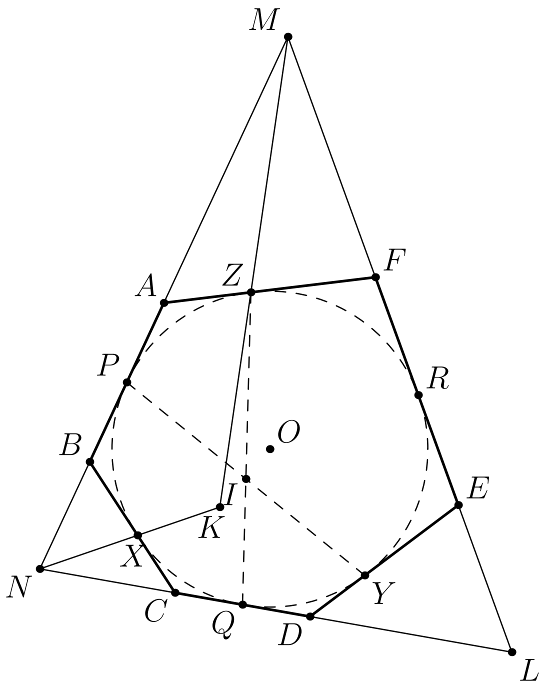
En el caso de que la cantidad de casillas desde S hacia cada uno de los bordes es impar, con lo que claramente la cantidad de casillas de S hacias los bordes es mayor a 0. Gracias a esto siempre se podrá hacer la partición indicada abajo. Con está partición queda claro el camino que la hormiga puede hacer: $S \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G$ recorriendo así todos las casillas gracias a los rectángulos de Tipo 1 y 2 previamente mencionados.



Solución del problema 5: Primero se va a demostrar por inducción que $x_n = 2^n - 1$. Se puede ver que $x_0 = 2^0 - 1 = 0$, $x_1 = 2^1 - 1 = 1$, y por esto los casos bases estan demostrados. Ahora supongamos que esto se cumple para x_{n-2}, x_{n-1}. Entonces $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} = 3(2^{n-1} - 1) - 2(2^{n-2} - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$, como se deseaba, completando así la inducción.

Entonces, gracias a lo demostrado anteriormente, $y_n = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 + 2^{n+2} = 2^{2n} + 2^{n+1} + 1 = (2^n + 1)^2$, y puesto $2^n + 1$ es impar para todo $n > 0$, queda demostrado lo que se pedía.

Solución del problema 6:



Denotemos por I a la intersección de PY y QZ. Primero demostraremos que I es el incentro del triángulo XYZ. Sea O el centro de Γ. Ya que AP y AZ son tangentes desde el mismo punto a la misma circunferencia, los triángulos rectángulos OPA y OZA son congruentes. De la misma manera, los triángulos rectángulos OPB y OXB son congruentes. Pero ya que P es punto medio de AB, estos cuatro triángulos son congruentes. Esto implica que los cuadriláteros $OPAZ$ and $OPBX$ son congruentes. Por lo tanto, $PX = PZ$ lo que implica que PY es bisectriz del ángulo XYZ. Así mismo, RX es bisectriz del ángulo ZXY y QZ es bisectriz del ángulo YZX. Por lo tanto PY, QZ y RX concurren en el incentro I del triángulo XYZ.

Ya que $BX = BP = AP = AZ$ y $PX = PZ$ se tiene que los triángulos BPX y APZ son congruentes (por criterio L.L.L). Con ángulos en los triángulos isosceles BPX, APZ y PXZ, concluimos que $\angle XPB = \angle PXZ$. Por lo tanto, las rectas AB y XZ son paralelas. Así mismo, FE es paralela a ZY y CD es paralela a XY. Sea L es el punto de corte de FE y CD. Entonces el triángulo XYZ tiene sus lados paralelos al triángulo NLM. Por lo tanto estos dos triángulos son homotéticos.

Por homotecia, se conoce que las rectas que unen puntos correspondientes concurren en el centro de homotecia. Por lo tanto, las rectas MZ, NX y LY concurren en el centro de homotecia. En particular, la intersección K de MZ y NX es el centro de homotecia de los triángulos MNL y ZXY. Es una propiedad conocida de la homotecia que puntos notables correspondientes en triángulos homotéticos están alineados con el centro de homotecia. Ya que Γ es el incírculo de MNL, se tiene que O es el incentro de MNL. Sabemos que I es el incentro de XYZ y los triángulos MNL y XYZ son homotéticos. Por lo tanto, K, O, I son colineales. Tenemos entonces que r, PY y QZ concurren en I.

2.4.4 NIVEL U

Solución del problema 1: Es fácil ver que si $0 < x < x_1$ entonces se tiene $c > 2x - 3x^3$, y si $x_1 < x < x_2$, entonces se tiene $c < 2x - 3x^3$. Luego tenemos que

$$\int_0^{x_1} (c - 2x + 3x^3)dx = A_1$$
$$\int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^3 - c)dx = A_2$$
$$\implies \int_0^{x_2} (c - 2x + 3x^3)dx = A_1 - A_2 = 0$$

Pero podemos evaluar la expresión anterior,

$$0 = \int_0^{x_2} (c - 2x + 3x^3)dx = cx_2 - x_2^2 + \frac{3x_2^4}{4}$$

Adicionalmente, se cumple que $c = 2x_2 - 3x_2^3$, y reemplazando en la ecuación anterior se tiene que

$$0 = 2x_2^2 - 3x_2^4 - x_2^2 + \frac{3x_2^4}{4} = x_2^2 - \frac{9x_2^4}{4} = x_2^2\left(1 - \frac{9x_2^2}{4}\right) \implies x_2 = \frac{2}{3}$$

En la última ecuación usamos que $x_2 > 0$. Se concluye que

$$c = 2x_2 - 3x_2^3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$$

Para finalizar es necesario comprobar que $x_2 > x_1$ para este valor de c. Se tiene

$$2x - 3x^3 - \frac{4}{9} = 0 \iff 0 = 27x^3 - 18x + 4 = (3x - 2)(9x^2 + 6x - 2)$$

Las raíces de esta ecuación son $\frac{2}{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{3}, \frac{-1-\sqrt{3}}{3}$, luego $0 < x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{3} < \frac{2}{3} = x_2$. Se concluye que $c = \frac{4}{9}$ es el valor buscado.

Solución del problema 2:

a) La desigualdad de la media aritmética y la media geométrica implica que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ con igualdad si y sólo si $x = y$. Además, el área de un triángulo cumple

$$a(ABC) = \frac{1}{2}d(A,B)d(B,C)\sin(\angle ABC) \leq \frac{1}{2}d(A,B)d(B,C)$$

La igualdad en la última desigualdad se da si y sólo si $\angle ABC = 90$. Combinando ambas desigualdades se tiene que

$$d(A,B)^2 + d(B,C)^2 \geq 2d(A,B)d(B,C) \geq 4 \cdot A(ABC)$$

La igualdad se da si y sólo si $AB = BC$ y $\angle ABC = 90$.

b) Es conocido que el área de un triángulo cuyos vértices tienen coordenadas enteras es la mitad de un entero positivo (es la mitad del determinante de una matriz con las coordenadas de los vértices y una columna de unos). Luego $4 \cdot A(ABC)$ es un entero. También $d(A,B)^2, d(B,C)^2$ son enteros.
De la parte a se tiene que

$$\begin{aligned}(d(A,B) + d(B,C))^2 &= d(A,B)^2 + 2d(A,B)d(B,C) + d(B,C)^2 \\ &\geq d(A,B)^2 + d(B,C)^2 + 4 \cdot A(ABC) \geq 8 \cdot A(ABC)\end{aligned}$$

Combinando con los datos del problema, se tiene que

$$8 \cdot A(ABC) + 1 > (d(A,B) + d(B,C))^2 \geq d(A,B)^2 + d(B,C)^2 + 4 \cdot A(ABC) \geq 8 \cdot A(ABC)$$
$$\implies 8 \cdot A(ABC) + 1 > d(A,B)^2 + d(B,C)^2 + 4 \cdot A(ABC) \geq 8 \cdot A(ABC)$$

En la expresión anterior, los 3 términos son enteros positivos, luego se concluye que $d(A,B)^2 + d(B,C)^2 = 4 \cdot A(ABC)$. Por la parte a, el triángulo ABC es rectángulo isósceles y por ende A, B, C son 3 vértices en un cuadrado.

Solución del problema 3:

a) Definimos $I(n)$ como la matriz identidad de $n \times n$, luego tenemos que $A(x,n) = B(1-x,n,n) + xI(n)$ para todo real x. Además, es fácil ver que $B(x,m,n)B(y,n,l) = B(nxy,m,l)$, $B(x,m,n) = xB(1,m,l)$, y $B(x,m,n) + B(y,m,n) = B(x+y,m,n)$.
Definimos un vector u por bloques, notemos que la máxima entrada es 1 y la mínima entrada es δ:

$$u = \begin{bmatrix} B(1,n,1) \\ B(\delta,m,1) \end{bmatrix}$$

Consideremos el producto

$$Ru = \begin{bmatrix} B(1-\alpha,n,n) + \alpha I(n) & B(\beta,n,m) \\ B(\beta,m,n) & B(\beta,m,m) + (1-\beta)I(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(1,n,1) \\ B(\delta,m,1) \end{bmatrix}$$

$$Ru = \begin{bmatrix} B(n(1-\alpha),n,1) + \alpha B(1,n,1) + B(m\beta\delta,n,1) \\ B(n\beta,m,1) + B(m\beta\delta,m,1) + (1-\beta)B(\delta,m,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n(1-\alpha) + \alpha + m\beta\delta)B(1,n,1) \\ (n\beta + m\beta\delta + (1-\beta)\delta)B(1,m,1) \end{bmatrix}$$

Definimos $\phi = n(1-\alpha) + \alpha + m\beta\delta$ y $\epsilon = \frac{n\beta + m\beta\delta + (1-\beta)\delta}{\phi}$, luego

$$Ru = \phi \begin{bmatrix} B(1,n,1) \\ B(\epsilon,m,1) \end{bmatrix}$$

Si $\epsilon = \delta$, entonces $Ru = \phi u$. Veamos que esta condición es posible:

$$\epsilon = \delta \iff \frac{n\beta + m\beta\delta + (1-\beta)\delta}{n(1-\alpha) + \alpha + m\beta\delta} = \delta \iff a\delta^2 + b\delta - c = 0$$

donde $a = m\beta, b = (n-1)(1-\alpha) - (m-1)\beta, c = n\beta$.
Notemos que $a > 0, b = (n-1)(1-\alpha) - (m-1)\beta > (m-1)(1-\alpha) - (m-1)\beta = (m-1)(1-\alpha-\beta) > 0, c > 0$. La última ecuación tiene dos raíces, escogemos la raíz positiva y por ende

$$\delta = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 + 4ac}} > 0$$

Luego el vector u tiene todas sus entradas positivas, su máxima entrada es igual a 1, su mínima entrada es δ y satisface la relación $Ru = \phi u$. Por la unicidad del problema, se concluye que $v = u$ y $\lambda = \phi$. Luego

$$\delta = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}$$

$$\lambda = n(1-\alpha) + \alpha + m\beta \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}$$

b) Si $\alpha, \beta \to 0$, entonces $a, c \to 0$ y $b \to n-1$. Luego

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} b + \sqrt{b^2 + 4ac} = \lim_{\alpha,\beta \to 0} 2b = 2(n-1)$$

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} \frac{\delta}{\beta} = \lim_{\alpha,\beta \to 0} \frac{2n}{b + \sqrt{b^2 + 4ac}} = \frac{n}{n-1}$$

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} \lambda = \lim_{\alpha,\beta \to 0} n(1-\alpha) + \alpha + m\beta\delta = n + 0 + 0 = n$$

Nota: El teorema de Perron-Frobenius asegura la existencia y unicidad del vector propio v pues la matriz R tiene todas sus entradas positivas. Más aún, el valor propio λ es el máximo en valor absoluto.

Solución del problema 4: Demostramos que s_n converge al valor de 2, demostrando que s_n es estrictamente creciente y acotada superiormente mediante inducción. Para el caso base tenemos que:

$$s_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = s_1 < \sqrt{2+2} = 2.$$

Supongamos que para algún $k \geq 1$ la sucesión $s_0, s_1, \cdots s_k$ es estrictamente creciente y $s_k < 2$. Tenemos que:

$$s_k = \sqrt{2+s_{k-1}} < \sqrt{2+s_k} = s_{k+1}$$

y además

$$s_{k+1} = \sqrt{2+s_k} < \sqrt{2+2} = 2$$

lo cual concluye la inducción. Podemos concluir que s_k converge.

Demostramos que m_n converge al valor de 2, demostrando que m_n es estrictamente creciente y acotada superiormente mediante inducción. Para el caso base tenemos que:

$$m_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = m_1 < \sqrt{2(2)} = 2.$$

Supongamos que para algún $k \geq 1$ la sucesión $m_0, m_1, \cdots m_k$ es estrictamente creciente y $m_k < 2$. Tenemos que:

$$m_k = \sqrt{2m_{k-1}} < \sqrt{2m_k} = m_{k+1}$$

y además

$$m_{k+1} = \sqrt{2m_k} < \sqrt{2(2)} = 2$$

lo cual concluye la inducción. Podemos concluir que m_k converge.

Demostramos que p_n converge al valor de 2, demostrando que p_n es estrictamente creciente y acotada superiormente mediante inducción. Para el caso base tenemos que:

$$p_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = p_1 < \sqrt{2}^2 = 2.$$

Supongamos que para algún $k \geq 1$ la sucesión $p_0, p_1, \cdots p_k$ es estrictamente creciente y $p_k < 2$. Tenemos que:

$$p_k = \sqrt{2}^{p_{k-1}} < \sqrt{2}^{p_k} = p_{k+1}$$

y además

$$p_{k+1} = \sqrt{2}^{p_k} < \sqrt{2}^2 = 2$$

lo cual concluye la inducción. Podemos concluir que p_k converge.
Definimos $l_1 = \lim_{n\to\infty} s_n$. Tenemos que $l_1 = \sqrt{2+l_1}$ y por lo tanto l_1 es raíz de $f(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ cuyas raíces son 2 y -1 pero ya que $l_1 \geq 0$ tenemos que $l_1 = 2$. Por lo tanto, s_n converge a 2.

Definimos $l_2 = \lim_{n\to\infty} m_n$. Tenemos que $l_2 = \sqrt{2l_2}$ y por lo tanto l_2 es raíz de $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ cuyas raíces son 0 y 2 pero ya que $l_2 > 0$ tenemos que $l_2 = 2$. Por lo tanto, m_n converge al valor de 2.

Sea $l = \lim_{n\to\infty} p_n$. Tenemos que $l = \sqrt{2}^l$ y por lo tanto l es una raíz de la función $f(x) = \sqrt{2}^x - x$. Hallamos los puntos críticos de $f(x)$ donde tenemos que $f'(x) = \frac{1}{2}\ln(2)\sqrt{2}^x - 1$ y por lo tanto

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\ln(2)}\right)$$

Ya que $f(x)$ tiene solamente un punto crítico, puede tener a lo mucho dos raíces. Vemos que 2 y 4 son raíces de $f(x)$ y por lo tanto $l \geq 2$. Sin embargo, ya que p_n está acotada superiormente por 2, tenemos que $l \leq 2$. Concluimos entonces que $l = 2$ y por lo tanto p_n converge al valor de 2, así las tres secuencias s_n, m_n, p_n convergen al valor de 2 en su límite.

Solución del problema 5: Definamos a los centros como $z_1, \cdots, z_k$ y a $P_1, \cdots, P_k$ las particiones. Para un centro arbitrario z, definimos $C_z = \{\ x |$ el centro más cercano a x es $z\ \}$.

Definamos como el *costo* Q de un agrupamiento en particiones P con centros z como

$$Q(P,z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in C_j} ||x - z_j||^2$$

la suma de la distancia mínima de cada punto a algún centro.

Demostramos que cuando solamente se tiene un agrupamiento P, el valor de z que minimiza el costo es necesariamente el baricentro c de todos los puntos. Sea p un punto arbitrario. Notemos que

$$\sum_i ||x_i - p||^2 = \sum_i ||x_i - c + c - p||^2 = \sum_i ||x_i - c||^2 + 2(p-c)\sum_i (x_i - c) + n||c-p||^2.$$

Ya que c es el baricentro, tenemos que $\sum_i ||x_i - c|| = 0$ y por lo tanto:

$$\sum_i ||x_i - p||^2 = \sum_i ||x_i - c||^2 + n||c-p||^2.$$

De aquí es fácil ver que el baricentro de todos los puntos minimiza la suma de las distancias euclidianas, que en nuestro caso es el costo. Para un punto arbitrario x, supongamos que en un paso del algoritmo x cambia de partición P a P' primero y luego su centro cambia de z_j a z'_j.Cuando se reasignan los puntos a las particiones con centro más cercano, tenemos claramente que $||x - z_j||^2 \leq ||x - z'_j||^2$ y por lo tanto:

$$Q(P,z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in C_j} ||x - z_j||^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in C'_j} ||x - z'_j||^2 = Q(P',z).$$

Cuando se recalcula los centros como el baricentro de los puntos en una partición, lo que demostramos previamente nos dice que:

$$Q(P',z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in C_j} ||x - z_j||^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in C'_j} ||x - z'_j||^2 = Q(P',z').$$

Podemos entonces concluir que el costo es una función decreciente a lo largo del algoritmo. Al realizar un paso, si el agrupamiento en particiones actual es igual al anterior, se mantendrá igual de ahí en adelante pues los puntos no cambiarán de centros.

Notemos que hay a lo mucho K^N agrupamientos válidos en K particiones ya que cada punto tiene K posible particiones a las que puede ir. Por lo tanto, hay una cantidad finita de agrupamientos posibles. En cada paso, el proceso produce un nuevo agrupamiento basado completamente en el agrupamiento previo.

Ya que el proceso produce particiones dentro de un conjunto finito de posibilidades, eventualmente debe entrar en un ciclo de agrupamientos distintos, ya que sino el conjunto posible sería infinito (principio de casillas infinito). Si dicho ciclo tiene longitud mayor a 1 entonces podemos empezar desde el primer agrupamiento en particiones y movernos alrededor del ciclo, notando que en cada nuevo agrupamiento el costo es menor. Ya que es un ciclo, eventualmente llegaremos al agrupamiento inicial, pero el costo es estrictamente menor. Esto es una contradicción y por lo tanto el ciclo tiene longitud 1, lo cual significa que luego de un número finito de pasos, el proceso llega a un agrupamiento en particiones que no cambia de ahí en adelante.

Solución del problema 6: Como x, y son reales positivos, se puede definir la transformación $u = \ln x$, $v = \ln y$ donde u, v son reales, y por ende $x = e^u, y = e^v$. Definimos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(u,v) = (a_1, b_1)e^{a_1u+b_1v} + (a_2, b_2)e^{a_2u+b_2v} + \ldots + (a_n, b_n)e^{a_nu+b_nv}$$

La transformación planteada implica que el problema es equivalente a demostrar que $f(u,v) = (0,0)$ para reales u, v. Definimos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(u,v) = e^{a_1u+b_1v} + e^{a_2u+b_2v} + \ldots + e^{a_nu+b_nv}$$

Es fácil ver que f es el gradiente de g, y como g es una función continua diferenciable, la existencia de un mínimo local (o global) implica que el gradiente se anula. Vamos a demostrar que un mínimo global existe.

Definimos $M(u,v) = \max_i \{a_iu + b_iv\}$ donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces es fácil ver que

$$g(u,v) = e^{a_1u+b_1v} + e^{a_2u+b_2v} + \ldots + e^{a_nu+b_nv} \geq e^{M(u,v)}$$

pues la función exponencial toma valores positivos.

Supongamos que $M(u,v) < 0$ para una pareja $(u,v) \neq (0,0)$, entonces $a_iu + b_iv < 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Denotemos R al polígono convexo con vértices en los puntos dados incluyendo su interior y perímetro, R es un conjunto convexo y por ende compacto. Consideremos la función lineal $h(x,y) = xu + vy$ con u, v fijos, la aplicación de h (continua) sobre R (compacto) da como resultado un conjunto compacto en $\mathbb{R}$, es decir un intervalo cerrado. Por nuestra suposición, este intervalo está compuesto de números negativos. Pero $(0,0) \in R$ y $h(0,0) = 0$, lo cual contradice la suposición y se concluye que $M(u,v) < 0$ para todo $(u,v) \neq (0,0)$.

La función $M(u,v)$ es continua en la circunferencia unitaria $u^2 + v^2 = 1$, que es un conjunto compacto, y por ende tiene un mínimo m, es decir

$$M(u,v) \geq m \text{ con } u^2 + v^2 = 1$$

Si $u^2 + v^2 = r^2$, entonces $u = ru', v = rv'$ con $u'^2 + v'^2 = 1$, por ende

$$M(u,v) = M(ru', rv') = \max_i \{a_iru' + b_irv'\} = rM(u', v') \geq rm$$

Luego si $u^2 + v^2 = r^2$ con $r > 0$, entonces $g(u,v) \geq e^{rm}$. Es decir, que para un radio suficientemente grande $R > 0$ se puede obtener $g(u,v) > n = g(0,0)$ con $u^2 + v^2 \geq R^2$. Es decir que los puntos fuera del círculo de radio R toman valores mayores al mínimo dentro del círculo. Finalmente, el círculo $u^2 + v^2 \leq R^2$ es compacto y la función $g(u,v)$ es continua, y por tanto tiene un mínimo en esta región, este mínimo es el mínimo global de la función.

3 PREMIADOS

3.1 NIVEL 1

MEDALLAS DE ORO

ANA VICTORIA ZURITA DOUMET
ADRIANA RONG ZHUO HONG
PABLO ADRIÁN MIRANDA TORO

MEDALLAS DE PLATA

VICTOR ANDRÉS UZHCA ZORILLA
EMILIO ANDRÉS LARREA REYES
KEVIN DANIEL ROJAS WASHCO
JAHIR MANUEL CAJAS TOAPANTA
MÓNICA SALOMÉ ZURITA DOUMET
MAURICIO ADRIÁN MANTILLA RUALES
VALERIA LEPE DELGADO

MEDALLAS DE BRONCE

JUAN RUBÉN FRANCO PERALTA
JUAN CARLOS MENOSCAL LARREA
YANDING MARIO YIN SOVENIS
VIOLETA GÓMEZ
MATEO NICOLÁS VIVANCO APOLO
FREDDY AMIR ZEAS QUIROZ
PABLO ENRIQUE ÁLVAREZ DÁVILA
DANIELA ELIZABETH PALACIOS CABRERA
EMILIANO ADRIÁN GÓMEZ LÓPEZ
ERIC JOSÉ BAQUERIZO NIETO

MENCIONES DE HONOR

REBECA GUIM
NATASHA FERNANDA VALAREZO OYOLA
LUIS FERNANDO ORTEGA TORRES
ANDRÉS FIDEL MUÑOZ GONZÁLEZ
JOEL SEBASTIÁN MARIDUEÑA MÁRQUEZ
MAURICIO ANDRÉS CEVALLOS ROBLES
JORGE ENRIQUE POVEDA CÓRDOVA
ANDRÉS SEBASTIÁN FUENTES LUPERA
EDUARDO CEDEÑO
GABRIEL ARTURO ALBÁN TERÁN
LUIS FERNANDO GRANADOS MARTÍNEZ
PABLO XAVIER CONRADO HERRERA
ALÍ EMANUEL CASTILLO ARMIJOS
VALERIA LAM
BRUNO BRAVO

- Cortes para medallas:
  - Oro: 33 Puntos
  - Plata: 25 Puntos
  - Bronce: 19 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 23 Puntos

    MARÍA CRISTINA GARCIA NARANJO
  - Puntaje más alto en la Fase 2: 14 Puntos

    DEBBIE PAOLA CONTRERAS GUTIÉRREZ, MARÍA CRISTINA GARCIA NARANJO
  - Puntaje más alto en la Fase 3: 30 Puntos

    ANA VICTORIA ZURITA DOUMET

3.2 NIVEL 2

MEDALLAS DE ORO
CHEN YI FAN
LEONARDO EMANUEL ZAMBRANO LÓPEZ
GIACOMO YU CHEN

MEDALLAS DE PLATA
STEPHANIE VANESSA GALLEGOS CAAMAÑO
YU PENG
JULIO ENRIQUE VICHE CASTILLO
EDUARDO ANDRÉS GONZÁLEZ RIVERA
JUAN FELIPE CASTRO PEÑARANDA
SEBASTIÁN MATEO TORRES MOLINA
JOEL SANTIAGO CHIPE CHACA

MEDALLAS DE BRONCE
DANIEL SEBASTIÁN SUAREZ AGUIRRE
SANTIAGO NICOLÁS BASTIDAS FIERRO
JOSÉ GABRIEL CASTILLO FLORES
LEONARDO ENRIQUE AYALA CIFUENTES
ZHIRON CRISTINA WU YUAN
BRUNO TRIANA
MIGUEL ANGEL GUZMAN CHANG
EDWIN SEBASTIÁN FRANCO BASTIDAS
JUAN STEVEN ESPINOZA CASTRO
ANTHONY JAVIER CARRILLO VEGA

MENCIONES DE HONOR
JUAN PABLO PORRAS DÁVILA
DANIEL ADRIÁN PAZOS ALTAMIRANO
MAURICIO ANDRÉS BRAVO PALMA
LEONEL ALEJANDRO CHICA SOTOMAYOR

- Cortes para medallas:
  - Oro: 22 Puntos
  - Plata: 14 Puntos
  - Bronce: 11 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 25 Puntos

    CHEN YI FAN
  - Puntaje más alto en la Fase 2: 14 Puntos

    MARÍA DE LOS ÁNGELES ANDINA ZAMBRANO, ELIDA CAMILA BARREIRO HIDALGO, EMILY ELIZA CHEN WU, LIGIA ELENA ESPINOZA DUEÑAS, STEPHANIE VANESSA GALLEGOS CAAMAÑO, ASLY POULLETTE GÓMEZ HOLGUÍN, SHEYLA GIANELLA LARREA CARRASCO, MATÍAS LEONARDO LOAYZA CORREA, HENNY ALLYN MERA GARCÍA, ANA PAULA MORÁN MARTILLO, THAIS AINARA TIGRERO YAGUAL, BRITTANNY YAMILET TORRES BAQUE, JOSEPH OMAR VILLA HOLGUÍN, MARÍA GABRIELA VILLÓN PALMA, CHEN YI FAN, GIACOMO YU CHEN, KIARA PIERINA ZAMBRANO FIGUEROA, LEONARDO EMANUEL ZAMBRANO LÓPEZ
  - Puntaje más alto en la Fase 3: 48 Puntos

    YU PENG

3.3 NIVEL 3

MEDALLAS DE ORO

ANA PAULA INDACOCHEA ROSADO
MARÍA GRATZIA INDACOCHEA ROSADO
SANTIAGO MIGUEL VELÁZQUEZ IANNUZZELLI
PEDRO ANDRÉS SUAREZ AGUIRRE

MEDALLAS DE PLATA

VALERIA ESTEFANÍA BARCO SANTANA
KEVIN BILL UBE ÁLVARO
DAVID ANDRÉS MONTALVÁN POPPE
VALERIE DENISSE BUSTOS BUENO
JOSÉ MIGUEL PÉREZ FLORES
XUELONG AN XUELONG

MEDALLAS DE BRONCE

NICOLÁS GONZÁLEZ GRANDA
AXEL ARTURO AVEIGA DEFAZ
ALEJANDRO SEBASTIÁN RODRÍGUEZ URGÍLEZ
DIEGO SEBASTIÁN RONQUILLO MANOSALVAS
GUILLERMO RICARDO AGUILERA HIDALGO
IVAN FERNANDO MIELES MENDOZA
ANGEL ADRIÁN CARRILLO VEGA
ESTEBAN SEBASTIÁN MOSCOSO GARCÍA

- Cortes para medallas:
  - Oro: 23 Puntos
  - Plata: 18 Puntos
  - Bronce: 10 Puntos
- Puntajes más altos en las fases clasificatorias:
  - Puntaje más alto en la Fase 1: 25 Puntos

    JUAN FRANKLIN MOROCHO HOLGUÍN, JOSÉ MIGUEL PÉREZ FLORES
  - Puntaje más alto en la Fase 2: 14 Puntos

    PEDRO ANDRÉS SUAREZ AGUIRRE
  - Puntaje más alto en la Fase 3: 48 Puntos

    VALERIA ESTEFANÍA BARCO SANTANA, ANA PAULA INDACOCHEA ROSADO

3.4 NIVEL U

MEDALLAS DE ORO
ANTHONY JOSHUE FLORES AZÚA

MEDALLAS DE PLATA
MELVIN HENRY POVEDA QUIMIZ
ADRIÁN JOSUÉ DELGADO MIRANDA

MEDALLAS DE BRONCE
DARÍO ANDRÉS TERÁN ACARO
CRISTHYAN BRYAN CAYETANO TUMBACO
JAN KRISTOFER MEJÍA RODRÍGUEZ

- Cortes para medallas:
  - Oro: 20 Puntos
  - Plata: 17 Puntos
  - Bronce: 11 Puntos
- Puntaje más alto en la fase clasificatoria: 11 Puntos

ADRIÁN JOSUÉ DELGADO MIRANDA

4 EQUIPO DE TRABAJO

La organización de la Olimpiada Nacional de Matemáticas 2017 fue realizada gracias al trabajo de:

- Romnie Acosta (OMEC)
- Eduardo Alba (SEDEM)
- Fernando Álvarez (OMEC)
- Danielle Aycart (OMEC)
- Valerie Bustos (OMEC)
- Jorge Chamaidán (OMEC)
- Nelson Córdova (USM)
- Paolo Cuellar (OMEC)
- Adrián Delgado (OMEC)
- Pedro Espinoza (UETS)
- Anthony Flores (OMEC)
- Fernando Gómez (OMEC)
- Qi Han (OMEC)
- David Hervas (SEDEM)
- Ana Paula Indacochea (OMEC)
- Galo Lara (OMEC)
- Hugo Mena (USM)
- Eugenia Molina (UEPRIM)
- Andrea Moreira (SEDEM)
- Eladio Oliveros (USM)
- Miguel Ordóñez (OMEC)
- Omar Paladines (OMEC)
- Javier Pérez (OMEC)
- Paula Pettinelli (USM)
- Julio Rivera (OMEC)
- Marcelo Rodríguez (OMEC)
- Daniel Samaniego (OMEC)
- Alfredo Sánchez (OMEC)
- Leslie Santamaría (USM)
- Xavier Soriano (OMEC)
- Vicente Torres (OMEC)

5 AUSPICIANTES

Un agradecimiento a los auspiciantes del evento:

- Universidad Santa María, Campus Guayaquil (USM)
- Sociedad Ecuatoriana de Matemáticas (SEDEM)
- Universidad de Guayaquil (UG)
- Unidad Educativa Particular Bilingüe Principito & Marcel Laniado de Wind (UEPRIM)
- Unidad Educativa Técnico Salesiano (UETS)