OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS

OMEC

2019

ÍNDICE

1 ENUNCIADOS **3**
1.1 PRIMERA FASE . . . 3
1.1.1 NIVEL B . . . 3
1.1.2 NIVEL A . . . 6
1.1.3 NIVEL 1 . . . 9
1.1.4 NIVEL 2 . . . 12
1.1.5 NIVEL 3 . . . 15
1.2 SEGUNDA FASE . . . 19
1.2.1 NIVEL B . . . 19
1.2.2 NIVEL A . . . 22
1.2.3 NIVEL 1 . . . 24
1.2.4 NIVEL 2 . . . 26
1.2.5 NIVEL 3 . . . 28
1.3 TERCERA FASE . . . 30
1.3.1 NIVEL B . . . 30
1.3.2 NIVEL A . . . 31
1.3.3 NIVEL 1 . . . 32
1.3.4 NIVEL 2 . . . 33
1.3.5 NIVEL 3 . . . 34
1.4 FASE FINAL . . . 35
1.4.1 NIVEL B . . . 35
1.4.2 NIVEL A . . . 36
1.4.3 NIVEL 1 . . . 37
1.4.4 NIVEL 2 . . . 38
1.4.5 NIVEL 3 . . . 39
1.4.6 NIVEL U . . . 40

2 SOLUCIONES **42**
2.1 PRIMERA FASE . . . 42
2.1.1 NIVEL B . . . 42
2.1.2 NIVEL A . . . 45
2.1.3 NIVEL 1 . . . 48
2.1.4 NIVEL 2 . . . 51
2.1.5 NIVEL 3 . . . 55
2.2 SEGUNDA FASE . . . 60
2.2.1 NIVEL B . . . 60
2.2.2 NIVEL A . . . 62
2.2.3 NIVEL 1 . . . 65
2.2.4 NIVEL 2 . . . 67
2.2.5 NIVEL 3 . . . 71
2.3 TERCERA FASE . . . 76
2.3.1 NIVEL B . . . 76
2.3.2 NIVEL A . . . 77
2.3.3 NIVEL 1 . . . 81
2.3.4 NIVEL 2 . . . 83
2.3.5 NIVEL 3 . . . 85
2.4 FASE FINAL . . . 88
2.4.1 NIVEL A . . . 88
2.4.2 NIVEL 1 . . . 91
2.4.3 NIVEL 2 . . . 93
2.4.4 NIVEL 3 . . . 96
2.4.5 NIVEL U . . . 99

3 PREMIADOS **103**
3.1 NIVEL B 103
3.2 NIVEL A 104
3.3 NIVEL 1 105
3.4 NIVEL 2 106
3.5 NIVEL 3 107
3.6 NIVEL U 108

4 EQUIPO DE TRABAJO **109**

5 AUSPICIANTES **109**

1 ENUNCIADOS

1.1 PRIMERA FASE

1.1.1 NIVEL B

Problema 1. Hallar el resultado de la operación:

$$6 \quad 1000 + 5 \quad 100 + 4 \quad 10 + 10$$

A) 6541 B) 6550 X C) 654 D) 456 E) 666

Problema 2. ¿Cuál es el número que falta en la lista de Vicente?

$$80, 40, \boxed{?}, 10, 5$$

A) 35 B) 30 C) 25 D) 20 X E) 15

Problema 3. ¿Cuál es la altura aproximada de una jirafa adulta?

A) $5\,mm$ B) $5\,cm$ C) $50\,cm$ D) $5\,m$ X E) $5\,km$

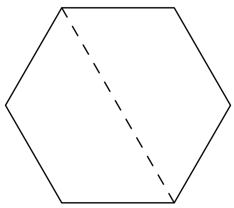
Problema 4. Una clase comienza 8:30 a.m. y termina 9:05 a.m. el mismo día. En minutos, ¿cuál es la duración de la clase?

A) 15 B) 25 C) 35 X D) 45 E) 75

Problema 5. La Olimpiada Matemática Ecuatoriana es una organización nacional que aspira tener cuarenta y tres mil treinta y tres participantes entre todos sus niveles. ¿Cómo se debe escribir este número en cifras?

A) 40 333 B) 43 033 X C) 403 033 D) 4 300 033 E) 40 300 033

Problema 6. Andrea toma un hexágono regular y lo corta exactamente en dos mitades como se muestra. Las figuras que obtiene corresponden a dos:



A) triángulos B) rombos C) trapecios X D) pentágonos E) hexágonos

Problema 7. Julio pudo ver que alguien había impreso la palabra OLIMPIADAS en la ventana. ¿Cómo se veía la desde el otro lado de la ventana?

A)  B)  C)  D)  E)  X

Problema 8. ¿Cuántas veces durante el año 2019 un reloj digital en funcionamiento mostrará la hora de 20:19?

A) 2 B) 12 C) 24 D) 52 E) 365 X

Problema 9. ¿Cuál de estos números es un múltiplo de tres?

A) 2017 B) 2018 C) 2019 X D) 2020 E) 2021

Problema 10. Tengo el doble de edad que cada uno de mis hijos, Arnaldo y Bernardo. Nuestras tres edades suman 76. ¿Cuántos años tiene Bernardo?

A) $9\frac{1}{2}$ B) 18 C) 19 X D) 36 E) 38

Problema 11. En el colegio de animales hay 3 gatos, 4 patos, 2 gansos y varios corderos tomando clases. El profesor búho contó las patas de todos sus alumnos en su clase y obtuvo 44 patas. ¿Cuántos corderos hay en la clase?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 X E) 6

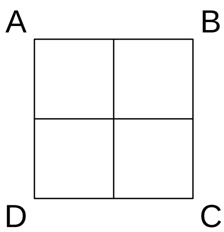
Problema 12. Mi gato ronronea 50 minutos cada hora. ¿Por cuántas horas al día mi gato ronronea?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 X E) 50

Problema 13. ¿Cuántas monedas de 25 centavos debo recibir por 500 monedas de 5 centavos?

A) 100 X B) 250 C) 500 D) 650 E) 2500

Problema 14. El cuadrado $ABCD$ es dividido en cuatro cuadrados más pequeños, como se muestra en la figura. El perímetro de cada uno de los cuadrados pequeños es 4. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?



A) 8 X B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

Problema 15. Los números en cada fila, columna y diagonal de la tabla a continuación suman 30. ¿Cuál es el valor de x?

4		
	10	x
	2	

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 X E) 8

Problema 16. Observe el patrón y averigüe la cantidad de números enteros en la siguiente secuencia:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10$$

A) 33 B) 44 C) 55 X D) 66 E) 77

Problema 17. ¿Cuántos números impares de 2 dígitos son mayores que 18?

A) 41 X B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

Problema 18. OMEC Futbol Club tiene un total de 15 puntos después de 6 partidos. En la liga donde juega se obtienen 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y 0 puntos por derrota. ¿Cuántas derrotas tuvieron?

A) 0 B) 1 X C) 2 D) 3 E) 5

Problema 19. La suma de los dígitos de 2018 es un número primo. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que los dígitos de otro año sea una vez más un número primo?

A) 1 B) 2 C) 3 X D) 5 E) 6

Problema 20. Un mono llamado Momo come 2 manzanas por cada 3 frutillas. Ayer había comido 35 entre manzanas y frutillas en total. ¿Cuántas manzanas comió?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 14 X E) 20

1.1.2 NIVEL A

Problema 1. Hallar el resultado de la operación:

$$8 \quad 4 \quad 2 + 4 \quad 2 \quad 8$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 X

Problema 2. Una tienda de ropa tiene una gran cantidad de calcetines. Desafortunadamente, cada calcetín ha sido separado de su correspondiente calcetín pareja, pero por suerte, cada calcetín individual está etiquetado con un código especial, compuesto solo de ceros (0) y unos (1). Dos calcetines se emparejan si sus códigos son diferentes en cada dígito: donde un código tiene 1, el otro código tiene 0, y viceversa. Por ejemplo, un calcetín con el código 0110 está emparejado con el calcetín con el código 1001. ¿Cuál de los siguientes pares de códigos no es un par de calcetines bien emparejado?

A) 1010 0101 B) 0011 1100 C) 1011 0100 D) 1101 0001 X E) 0000 1111

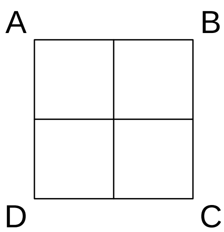
Problema 3. Si al triple un número se le resta 60, se obtiene 180. ¿Cuál es el número?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80 X

Problema 4. ¿Cuántas monedas de 25 centavos debo recibir por 500 monedas de 5 centavos?

A) 100 X B) 250 C) 500 D) 650 E) 2500

Problema 5. El cuadrado $ABCD$ es dividido en cuatro cuadrados más pequeños, como se muestra en la figura. El perímetro de cada uno de los cuadrados pequeños es 4. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?



A) 8 X B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

Problema 6. Se dice que una frase es *palíndroma* si se lee igual de izquierda a derecha o viceversa sin tomar en cuenta signos de puntuación y acentos. Por ejemplo la frase "Aroma a mora" es palíndroma. ¿Cuántas de las siguientes frases son palíndromas?

- Ana, la galana.
- Luz azul.
- Yo dono rosas, oro no doy.
- La ruta natural.
- Ojo rojo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 X

Problema 7. Se tiene tres libros en un librero, uno es de matemáticas, otro de física y otro de química. ¿De cuántas formas distintas los puedo ordena?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6 X

Problema 8. En la suma mostrada, P y Q representan cada uno, una cifra *diferente* de un solo dígito. Hallar el valor de $P+Q$

$$\begin{array}{r} PQQ \\ +PPQ \\ \underline{QQQ} \\ 876 \end{array}$$

A) 3 B) 5 X C) 7 D) 6 E) 4

Problema 9. Un número primo se llama "*Superprimo*" si al duplicarlo, y luego restarle 1, da como resultado otro número primo. ¿Cuántos números Superprimos menores que 15 existen?

A) 2 B) 3 X C) 4 D) 5 E) 6

Problema 10. ¿Cuál de las opciones muestra un número que es casi el doble cuando el orden de sus dígitos se ha invertido?.
Ejemplo: Si el número es 2019, al invertir el orden de sus dígitos se obtiene 9102.

A) 1002 X B) 2003 C) 8664 D) 6003 E) 2014

Problema 11. El promedio de seis números es 49. Si se resta 6 a dos de los números. ¿Cuál es el promedio ahora?

A) 45 B) 46 C) 47 X D) 48 E) 49

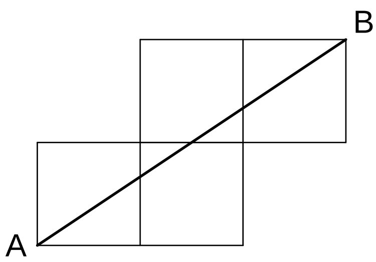
Problema 12. ¿Cuántos números entre 10 y 100 son divisibles para 11?

A) 7 B) 8 C) 9 X D) 10 E) 11

Problema 13. ¿Cuál de las siguientes opciones no puede ser la medida de uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo?

A) 30 B) 60 C) 45 D) 90 E) 120 X

Problema 14. ¿Cuál es la longitud del segmento AB si los cuadrados de la figura son de lado 1?



A) 5 B) $\sqrt{13}$ X C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) 13

Problema 15. Número de lados de un pentágono + Número de lados de un trapezoide Número de lados de un hexágono = Número de lados de:

A) Un cuadrado B) Un octágono C) Un círculo D) Un triángulo X E) Un pentágono

Problema 16. La hora en un reloj digital es 5:55 . ¿Cuántos minutos deben pasar antes que el reloj muestre la siguiente hora con todos los dígitos idénticos?

A) 71 B) 72 C) 255 D) 316 X E) 436

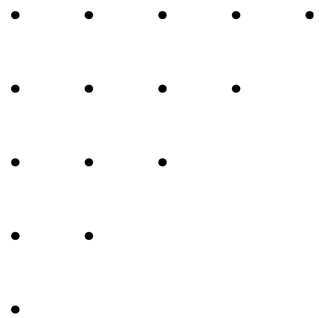
Problema 17. Cuando yo tenia 6 años, mi hermana tenia la mitad de mi edad, ahora yo tengo 70 años. ¿Cuántos años tiene mi hermana?

A) 35 B) 40 C) 67 X D) 45 E) 55

Problema 18. Si hoy es viernes, entonces 2019 días a partir de hoy será:

A) lunes X B) martes C) viernes D) domingo E) jueves

Problema 19. ¿Cuántos cuadrados tienen como vértices los puntos de la figura que se muestra?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10 X

Problema 20. Las longitudes de los tres lados de un triangulo pueden ser:

A) $0,1,2$ B) $1,2,3$ C) $2,3,4$ X D) $2,4,6$ E) $2,2,4$

1.1.3 NIVEL 1

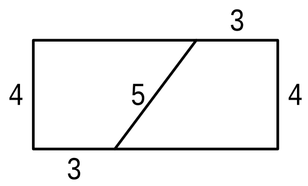
Problema 1. Uno de los cinco números entre las opciones presentadas, es divisor de la suma de los otros cuatro. ¿Cuál es ese número?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 38 X E) 42

Problema 2. Si $\frac{1}{8}$ de un número es $\frac{1}{5}$. ¿Cuánto vale $\frac{5}{8}$ de ese número?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 1 X E) 2

Problema 3. Un rectángulo es dividido en dos trapezoides congruentes como se muestra en la figura.



Hallar el área del rectángulo.

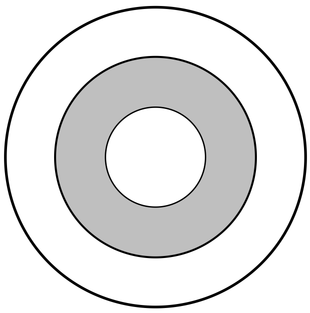
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 X

Problema 4. Hallar el valor de x que satisface la ecuación:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}=\sqrt{36}$$

A) 5 B) 7 C) 9 X D) 11 E) 13

Problema 5. En el diagrama, el área del anillo central sombreado es 6 veces el área del círculo más pequeño. El área de la anillo exterior sin sombrear es 12 veces el área del círculo más pequeño. ¿Qué fracción del área del círculo más grande es el área del círculo más pequeño?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{19}$ X

Problema 6. Solo hay un entero positivo de dos dígitos que es exactamente el doble de la suma de sus dígitos. ¿Cuál es el número?

A) 81 B) 78 C) 28 D) 18 X E) 11

Problema 7. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar dos parejas de casados en cuatro sillas dispuestas en fila, si marido y mujer deben sentarse juntos?.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 24 X

Problema 8. Hay varios grupos de seis enteros cuyo producto es 1. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la suma de tal grupo de seis enteros?

A) 6 B) 2 C) 0 X D) 2 E) 6

Problema 9. El promedio de seis números es 49. Si se resta 5 a cada uno de los números. ¿Cuál es el promedio ahora?

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 X E) 45

Problema 10. Si $x + y = 0$ con $x \neq 0$. Hallar el valor de $\frac{x^{2019}}{y^{2019}}$

A) 1 B) 0 C) 1 X D) 2^{2019} E) $\frac{x}{y}$

Problema 11. El 1000% de cierto número es 100. ¿Cuál es ese número?

A) 1 B) 10 X C) 100 D) 2 E) 20

Problema 12. ¿Cuántos números enteros entre 500 y 700 existen, tales que la suma de sus dígitos s 12?

A) 7 B) 17 X C) 27 D) 37 E) 47

Problema 13. ¿Cuántos dígitos tiene el número 10000^{9999} cuando se lo expande por completo?

A) 9999 B) 10000 C) 39996 D) 39997 X E) 39998

Problema 14. Tomando en cuenta la siguiente lista:

$$10, 11, 12, \ldots, 97, 98, 99$$

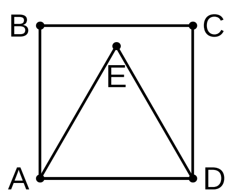
¿Cuántos números tienen la propiedad de ser mayores que la suma de sus dígitos?

A) 88 B) 89 C) 90 X D) 91 E) 99

Problema 15. Si tengo en mi bolsillo únicamente 7 monedas, juntas tienen un valor de 49 centavos. ¿Cuántas monedas de 5 centavos tengo en mi bolsillo?

A) 0 X B) 1 C) 2 D) 5 E) 7

Problema 16. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y ADE es un triángulo equilátero. Hallar en grados la medida del ángulo $\backslash BAE$.



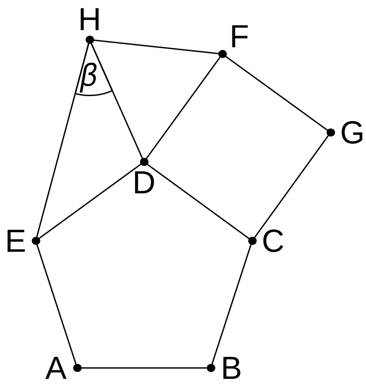
A) 15 B) 30 X C) 45 D) 60 E) 90

Problema 17. Usando las letras C, E, M, O podemos formar "*palabras*" de cuatro letras. Si estas palabras las escribimos en orden alfabético, hallar la posición ocupa la "*palabra*" $OMEC$.

Nota: Las "*palabras*" no necesariamente tienen sentido gramatical y además no incluyen letras repetidas, por ejemplo: $OMEE$ no es una "*palabra*" válida.

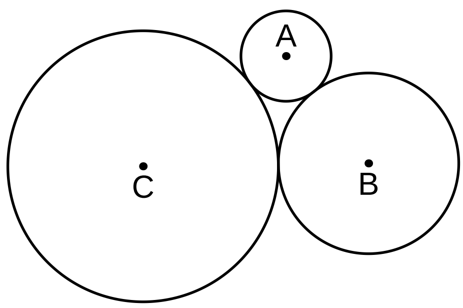
A) 22　　B) 23　　C) 24 X　　D) 25　　E) 26

Problema 18. En la figura, $ABCDE$ es un pentágono regular $CDFG$ es un cuadrado y DFH es un triángulo equilátero. Hallar en grados el valor del ángulo b.



A) 30　　B) 36　　C) 39 X　　D) 45　　E) 60

Problema 19. Tres círculos tienen centros A, B, C,cn radios $2, 4, 6$ respectivamente. Los círculos son tangentes entre sí como se muestra en la figura. El triángulo ABC tiene:



A) \ A es obtuso　　B) \ $B = 90$　　C) \ $A = 90$ X　　D) \ $B =$ \ C　　E) \ A, \ B, \ C son agudos

Problema 20. Existen exactamente tres pares de enteros positivos (a, b) que satisfacen la ecuacion:

$$2^4 + a^b = 2^5$$

para cada par (a, b) que es solución de la ecuación se suma $a + b$. Hallar el máximo valor que puede tomar $a + b$.

A) 6　　B) 17 X　　C) 20　　D) 22　　E) 30

1.1.4 NIVEL 2

Problema 1. El número $10^{101} \quad 1$ se escribe como un entero en su forma estándar. La suma de los dígitos de ese entero es:

A) 509 B) 609 C) 709 D) 809 E) 909 X

Problema 2. Tres décimas partes de nuestro planeta están cubiertas de tierra y el resto está cubierto de agua. El noventa y siete por ciento del agua es agua salada y el resto es agua dulce. ¿Qué porcentaje de nuestro planeta está cubierto de agua dulce?

A) 20.1% B) 79.9% C) 32.1% D) 2.1% X E) 9.6%

Problema 3. Sea $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$, $c = 7^{10}$. Entonces es verdad que:

A) $c < b < a$ X B) $a < c < b$ C) $b < a < c$ D) $b < c < a$ E) $c < a < b$

Problema 4. Hallar la cantidad de valores enteros x tal que $\dfrac{3}{x+1}$ es un entero

A) 1 B) 3 C) 4 X D) 5 E) 6

Problema 5. Se tienen cuatro colores: amarillo, azul, rojo y blanco. ¿Cuántas banderas de cuatro colores, formadas por cuatro franjas horizontales del mismo tamaño, sin que exista repetición de colores se pueden hacer?

A) 6 B) 12 C) 24 X D) 32 E) 64

Problema 6. La diferencia entre dos números enteros es 1. La suma de los dos números enteros puede ser:

A) 2016 B) 2018 C) 2019 X D) 2020 E) 2022

Problema 7. En la figura, $4PQR$ es isósceles con $PQ = PR$. Hallar en grados el valor de x.

A) 110 X B) 90 C) 95 D) 100 E) 105

Problema 8. ¿Cuántos números de cuatro dígitos, divisibles entre 4, se pueden formar usando los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$?

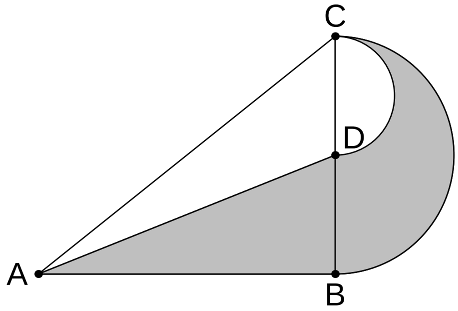
A) 30 B) 75 C) 125 X D) 150 E) 205

Problema 9. Considere la expresión:

$$187x \quad 104y = 41?'Cuáleselúnicopar(x,y)quenosatisfacelaecuación?$$

A) $(107, 192)$ B) $(211, 379)$ C) $(419, 753)$ D) $(523, 940)$ E) $(314, 565)$ X

Problema 10. El triángulo ABC es rectángulo en B y tiene $50cm^2$ de área. D es el punto medio de BC y $AB = \dfrac{25}{2}cm$. Los arcos $\bar{BC}$ y $\bar{CD}$ son semicircunferencias. Hallar el área sombreada.



A) $26 + 5p$ B) $6 + 25p$ C) $25 + 6p$ X D) $5 + 26p$ E) p

Problema 11. ¿Cuántos números pares de tres dígitos tienen dos dígitos impares?

A) 20 B) 48 C) 100 D) 125 X E) 225

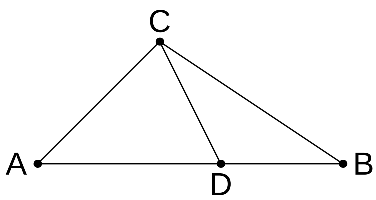
Problema 12. En el triángulo isósceles ABC, se sabe que $AB = BC$ y $\backslash B = 144$. Hallar en grados sexagesimales el ángulo agudo formado por la bisectriz de $\backslash A$ con la altura correspondiente al lado AC

A) 51 B) 61 C) 71 D) 81 X E) 91

Problema 13. Sabiendo que $x^2yz^3 = 2019^3$ y además $xy^2 = 2019^9$. Hallar el valor numérico de xyz

A) 2019^4 X B) 2019^5 C) 2019^6 D) 2019^7 E) 2019^8

Problema 14. En un triángulo isósceles ABC con $CA = CB$, el punto D, está marcado en el lado AB de forma que $AD = AC$ y $DB = DC$, como se muestra en la figura. Hallar la medida del ángulo $\backslash ACB$



A) 18 B) 80 C) 81 D) 108 X E) 128

Problema 15. Un numero natural A de tres dígitos "*arrolla*" a un número natural B de tres dígitos si cada dígito de A es mayor que el dígito correspondiente en B. Por ejemplo, 876 arrolla a 345, pero 651 no arrolla a 542 puesto que $1 < 2$. ¿Cuántos números de tres dígitos arrollan a 314?

A) 120 B) 240 X C) 360 D) 480 E) 600

Problema 16. ¿De cuántas maneras se pueden lanzar dos dados, uno amarillo y uno azul, de tal forma que se obtenga una suma divisible entre 3?

A) 12 X B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Problema 17. Sean a, b, c enteros positivos, con $\dfrac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11. Hallarelnúmerodeternas(a, b, c)$ tales que

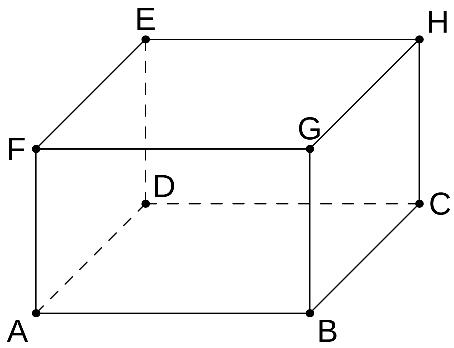
$a + 2b + c$ 40

A) 30 B) 33 C) 37 D) 40 E) 42 X

Problema 18. La expresión $(a + b + c + d + e + f + g + h + i)^2$ se expande y simplifica. ¿Cuántos términos diferentes tiene la expresión?

A) 36 B) 9 C) 45 X D) 81 E) 72

Problema 19. La suma de las longitudes de todos las aristas del prisma rectangular $ABCDEFGH$ es 24. Si el área de superficie total del prisma es 11, determine la longitud de la diagonal AH



A) 5 X B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Problema 20. Considere la siguiente secuencia infinita, donde cada término después del primero es la cuarta parte del término anterior:

$$2^{300}, 2^{298}, 2^{296}, 2^{294}, \ldots$$

se conoce que contiene un único término entero impar. ¿Cuál es la posición de este término impar?

A) 131 B) 141 C) 151 X D) 161 E) 171

1.1.5 NIVEL 3

Problema 1. Los dígitos $1, 2, 3, 4$ se pueden organizar para formar veinticuatro números de cuatro dígitos diferentes. Si estos veinticuatro números se enumeran de menor a mayor, ¿en qué posición está el número 3142?

A) 14 X B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Problema 2. Sean X, Y fracciones continuas con:

$$X = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \qquad Y = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Entonces es verdad que:

A) $X = Y$ B) $2X < Y$ C) $2X = Y$ D) $2X > Y$ X E) $2X + Y = 2$

Problema 3. Sean $A(-9, -2)$ y $B(6, 8)$ dos puntos en el plano cartesiano. Incluyendo A y B, ¿cuántos puntos en el segmento AB tienen ambas coordenadas enteras?

A) 2 B) 6 X C) 7 D) 11 E) 16

Problema 4. Al simplificar la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}}$$

se obtiene

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 X

Problema 5. Sean a, b, c números reales tales que $abc = 1$. Hallar el valor numérico de:

$$\frac{a}{1 + a + ab} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{c}{1 + c + ac}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 X E) 0

Problema 6. Considere las expresiones:

$$A = (2019)(1 + 2 + \cdots + 2020)$$
$$B = (2020)(1 + 2 + \cdots + 2019)$$

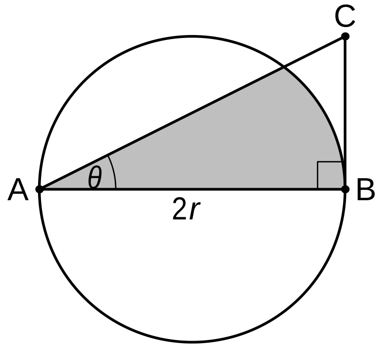
entonces es verdad que:

A) $B > A$ B) $A > B$ X C) $A = B$ D) $2A = B$ E) $2B = A$

Problema 7. Hallar el valor de $\log_{49} 16$ si $\log_{14} 28 = a$

A) $a^2 - 2a$ B) $\dfrac{1}{a+2}$ C) $\dfrac{1-a}{2(a-1)}$ D) $\dfrac{a-1}{2-a}$ E) $\dfrac{2(a-1)}{2-a}$ X

Problema 8. Hallar el área sombreada en términos de r y q, si se sabe que AB es el diámetro del círculo.



A) $[sen(2q) \quad 2q]\, r^2$ B) $sen(q) + 2q + r^2$ C) $[sen(q) + 2q]\, r^2$ D) $\frac{r^2}{4}\,[sen(q) \quad 2q]$ E) $\frac{r^2}{2}\,[sen(2q) + 2q]$ X

Problema 9. Se tienen tres colores: amarillo, azul y rojo. ¿Cuántas banderas de tricolores, formadas por tres franjas horizontales del mismo tamaño, pudiéndose repetir los colores, pero sin poner dos franjas consecutivas del mismo color, se pueden hacer?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 X E) 14

Problema 10. En el triángulo ABC, se conoce que $AB = 20$, $AC = 21$ y $BC = 29$. Los puntos D, E se encuentran sobre el segmento BC tal que $BD = 8$ y $EC = 9$. Hallar el ángulo $\setminus DAE$

A) 30 B) 45 X C) 60 D) 90 E) 95

Problema 11. Hallar el coeficiente de x^9 en el desarrollo de:

$$(1 + x^3 + x^6)^{10}$$

A) 120 B) 210 X C) 21 D) 12 E) 0

Problema 12. Un punto ubicado en la cuerda de un círculo se encuentra a 8 cm del extremo de dicha cuerda, y a 7 cm del centro del círculo. Si el radio del círculo tiene 13 cm, hallar la longitud en cm de la cuerda.

A) 22 B) 23 X C) 24 D) 25 E) 26

Problema 13. Un numero natural A de cuatro dígitos *"arrolla"* a un número natural B de cuatro dígitos si cada dígito de A es mayor que el dígito correspondiente en B. Por ejemplo, 8761 arrolla a 3450, pero 6517 no arrolla a 5423 puesto que $1 < 2$. ¿Cuántos números de cuatro dígitos arrollan a 2020?

A) 55^2 B) 56^2 X C) 57^2 D) 58^2 E) 59^2

Problema 14. Sean x_1, x_2 las soluciones reales de la ecuación:

$$\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$$

Hallar el valor del producto $x_1 \quad x_2$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{8}$ X E) $\frac{1}{16}$

Problema 15. Hallar el mínimo valor que puede tomar la función $f(x) = (sen\, 2019x)(\cos 2019x)$

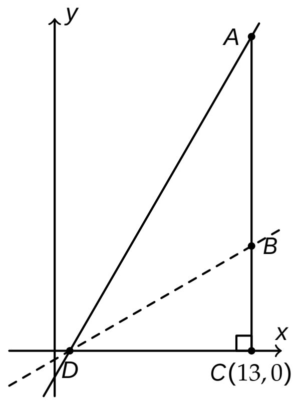
A) 2019 B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{2}$ X D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Problema 16. Ecuador, el hogar de la OMEC, cambió años atrás su esquema de matrícula de vehículos. Cada matrícula antigua consistía en una letra mayúscula, seguida de cuatro dígitos. Cada nueva placa consta de tres letras mayúsculas, seguidas de cuatro dígitos. ¿En cuántas veces aumenta el número de posibles matrículas?

Nota: La letra Ñ no se toma en cuenta para formar ninguna placa.

A) 26 B) 26^2 X C) 26^3 D) 26^4 E) 26^5

Problema 17. En la figura, la ecuación de la recta AD es $y = \sqrt{3}(x - 1)$. BD es la bisectriz del triángulo ACD trazada desde D. Si el punto B tiene coordenadas (p, q). Hallar el valor de q

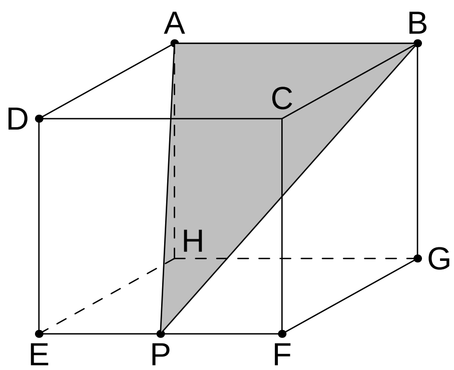


A) 6 B) 6.5 C) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ X E) $\frac{13}{\sqrt{3}}$

Problema 18. En una secuencia, cada término después del segundo término es el doble de la suma de los dos términos anteriores. El séptimo término de la secuencia es 8, y el noveno término es 24. ¿Cuál es el undécimo término de la secuencia?

A) 64 B) 56 C) 28 D) 304 E) 160 X

Problema 19. $ABCDEFGH$ es un cubo con arista de longitud 2. P es el punto medio de EF, como se muestra en la figura. Hallar el área del triángulo APB.



A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{8}$ X D) 6 E) $\sqrt{32}$

Problema 20. Una baraja de 100 cartas está numerada del 1 al 100. Cada carta tiene el mismo número impreso en ambos lados. Un lado de cada carta es rojo y el otro es amarillo. Jorge coloca todas las cartas, con el lado rojo hacia arriba, sobre una mesa. Primero da vuelta a cada carta que tiene un número divisible por 2. Luego examina todas las cartas, y da vuelta a cada carta que tiene un número divisible por 3. ¿Cuántas cartas tienen el lado rojo hacia arriba cuando Jorge termina?

A) 83 B) 17 C) 66 D) 50 E) 49 X

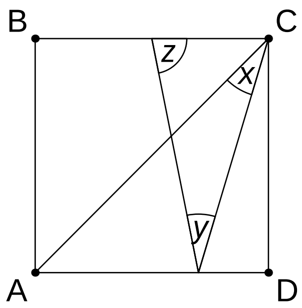
1.2 SEGUNDA FASE

1.2.1 NIVEL B

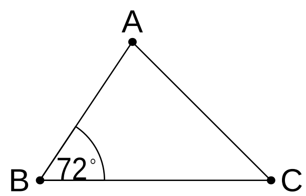
Problema 1. Contar los números primos de la siguiente lista:

$$11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$$

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrado como se muestra en la figura, además $x = 23$, $y = 32$. Hallar en grados sexagesimales el ángulo z.



Problema 3. En el triángulo ABC, se sabe que el ángulo B mide 72 . ¿Cuál es la suma, en grados sexagesimales de los otros dos ángulos interiores del triangulo?



Problema 4. Cuando cierto número es dividido para 10, tiene cociente 99 y deja residuo 9. ¿Cuál es ese número?

Problema 5. Hallar la suma de todos los números primos que existen entre 60 y 90.

Problema 6. Hallar el perímetro del rectángulo R, sabiendo que:
La Figura 1 está formada por dos rectángulos iguales a R.
La Figura 2 está formada por tres rectángulos iguales a R.
Perímetro de la Figura 1 = 58cm
Perímetro de la Figura 2 = 82cm

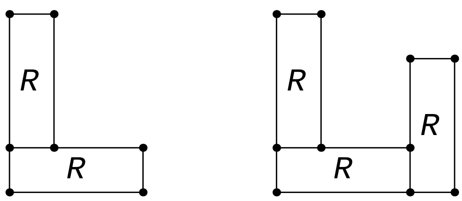
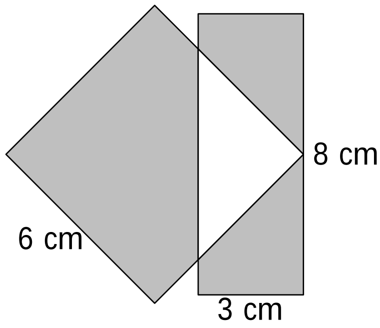


Figura 1 Figura 2

Problema 7. Durante una elección interna de la OMEC, solo el 50% de sus miembros votaron. De estos, el 60% votó a favor de realizar una fiesta con los ganadores del año 2019. ¿Qué porcentaje de los miembros votó a favor de realizar una fiesta con los ganadores del año 2019?

Problema 8. Abdulá Segura desea elegir un código para su candado de cuatro dígitos. Quiere que sea un múltiplo de 4 y cada dígito después del primero sea uno más que el dígito anterior. ¿Cuál es el código que elige?

Problema 9. En la figura se muestra un cuadrado con lados de longitud 6 cm. Se superpone un rectángulo con lados de longitud 3 cm y 8 cm. Cada diagonal del cuadrado es paralela a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área sombreada en cm^2?



Problema 10. ¿Cuál es el valor del dígito Z?

$$\begin{array}{rr} & ZZ \\ & ZZ \\ + & Z \\ & Z \\ & \underline{Z} \\ & 100 \end{array}$$

Problema 11. Se conoce que

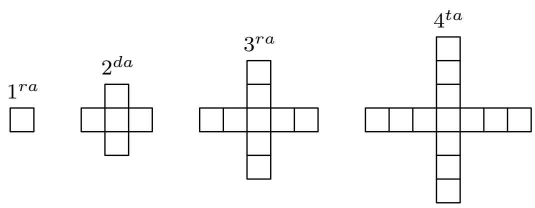
$$\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44}+\frac{1}{88}=\frac{15}{88}$$

y en la suma de fracciones:

$$\frac{12}{11}+\frac{23}{22}+\frac{45}{44}+\frac{89}{88}$$

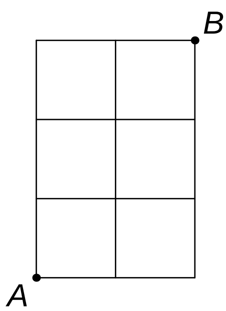
el denominador es 88. Hallar el valor del numerador.

Problema 12. Suponiendo que el patrón de las figuras continúa. ¿Cuántos cuadrados tiene la vigésima figura?



Problema 13. ¿Cuántos caminos existen para ir desde A hasta B siguiendo las lineas, si solo se puede ir hacia la derecha y hacia arriba?

Nota: Está prohibido ir hacia la izquierda y hacia abajo.

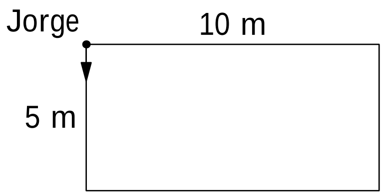


Problema 14. Juan y Pablo trabajan en la misma empresa. Juan tiene un día franco cada 8 días. Pablo tiene un día franco cada 7 días. Hoy es el día franco de Juan; Pablo tuvo franco ayer.
¿Dentro de cuántos días tendrán franco el mismo día?

Problema 15. El triple de un número N es igual a 333^{1000}. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número N?

1.2.2 NIVEL A

Problema 1. Jorge está de pie en una esquina del campo rectangular que se muestra. Camina el perímetro del campo 5 veces. ¿Cuántos metros camina Jorge?



Problema 2. Hallar el dígito que ocupa el lugar de las unidades del número:

$$9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Problema 3. En la figura que se muestra, los números en cada fila, columna y diagonal, si se multiplican dan el mismo resultado. La suma de los dos números que faltan es:

12	1	18
9	6	4
		3

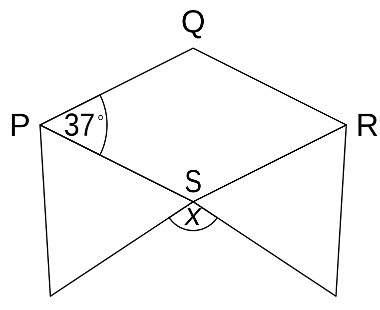
Problema 4. Hallar el resultado de:

$$\frac{2018 \quad 0,2019}{2,018 \quad 20,19}$$

Problema 5. En una caja de caramelos, la mitad son de chocolate, la cuarta parte de menta, la sexta parte de frutilla y el resto de coco. Si la caja tiene 18 caramelos de chocolate. ¿Cuántos caramelos son de coco?

Problema 6. Pienso un número natural. Si lo multiplico por sí mismo y por 5 y después le sumo 7, me da un número menor que 100. En cambio, si lo multiplico por sí mismo y por 7 y después le sumo 5, me da un número mayor que 100. ¿Qué número pensé?

Problema 7. La figura muestra un rombo, $PQRS$, unido a dos triángulos equiláteros. Uno de los ángulos más pequeños del rombo es 37 . ¿Cuál es el tamaño en grados sexagesimales del ángulo marcado con x?



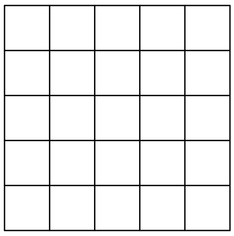
Problema 8. Andrea tiene 5 primas: Ani, Bibi, Ceci, Dani y Eli. De todas ellas, desea invitar a 2 primas a cenar a su casa. ¿De cuántas maneras distintas puede invitar Andrea sus primas?.

Problema 9. En la suma

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$$

cada letra representa un número de un dígito, diferente de cero y distintos entre sí. La suma es una fracción más pequeña que 1 y lo más cercano posible a 1. Después de hallar la fracción, suma el numerador con el denominador.

Problema 10. ¿Cuál es el número total de cuadrados distintos con tamaño desde 1 1 hasta 5 5, que se pueden encontrar en la siguiente figura?



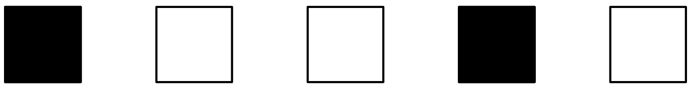
Problema 11. Hallar la suma de todos los números primos que existen entre 60 y 90.

Problema 12. Deseo cambiar las siguientes denominaciones:

diez monedas de 25 centavos + diez monedas de 5 centavos + diez monedas de 1 centavo

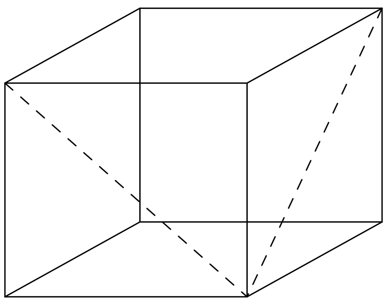
¿Cuántas monedas de 10 centavos debo recibir por el cambio?

Problema 13. Cinco cuadrados iguales tienen un lado blanco y un lado negro. Se encuentran en fila con la cara blanca hacia arriba. Un movimiento consiste en escoger un único par de cuadrados vecinos y darles vuelta. ¿Cuántos movimientos como mínimo son necesarios para que los cuadrados queden como la figura?



Problema 14. La tienda de la OMEC posee 2 marcas diferentes de camisetas, y para cada marca existen 3 tallas y 4 colores. ¿Cuántos tipos diferentes de camisetas tiene la OMEC?

Problema 15. En la figura se muestra un cubo, en el cual se han trazado dos diagonales en dos caras adyacentes y que tienen como punto común uno de los vértices del cubo. Hallar en grados el ángulo que formar estas diagonales.



1.2.3 NIVEL 1

Problema 1. Si multiplicamos todos los números primos menores que 100. ¿Cuál es el dígito que ocupa el lugar de las unidades de ese producto?

Problema 2. El promedio de cinco enteros positivos diferentes es 11. ¿Cuál es el mayor número posible de los cinco enteros positivos?

Problema 3. Un polígono regular de 2019 lados tiene perímetro 2019^2. Hallar el valor de uno de sus lados.

Problema 4. En una fiesta, el número de personas que bailan es igual al 25% del número de personas que no bailan. ¿Cuál es el porcentaje del total de personas en la fiesta que no bailan?

Problema 5. Hallar el producto de los dos valores de x que satisfacen:

$$x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{5}$$

Problema 6. Danielle lanza una moneda 50 veces. Si ella obtiene cara, Fernando le da 7 dólares a Danielle, y si ella obtiene sello, Danielle le devuelve 4 dólares a Fernando. Se sabe al final Fernando le da 119 dólares a Danielle, ¿cuántas veces ella obtuvo cara?

Problema 7. El profesor Jorge aplica una prueba de 6 problemas para 18 estudiantes. Cada problema tiene valor de 0 ó 1 punto; no existen puntuaciones parciales. Después de la prueba, Jorge hizo una tabla como la que se muestra, para organizar las calificaciones, cada fila representa un estudiante y cada columna representa un problema.

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
Andrea	0	1	1	1	1	0
Bernardo	1	1	1	0	0	1
Fernando	0	1	1	1	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Vicente	0	0	1	1	1	1

Jorge pudo verificar que cada estudiante acertó exactamente 4 preguntas y que cada pregunta tiene la misma cantidad m de aciertos. Hallar el valor numérico de m.

Problema 8. Hallar el menor perímetro que puede tener un triángulo isósceles no equilátero, donde las longitudes de sus lados son números enteros.

Problema 9. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras distintas que se puede formar usando los dígitos $1, 3, 6$?

Problema 10. En la figura dada, $ABCD$ es un cuadrado y se eligen puntos en los lados tales que $z = 75$ y $y = 36$. Hallar x en grados.

Problema 11. Tres números tienen una media (promedio) de 7. La moda de estos tres números es 9. ¿Cuál es el más pequeño de estos tres números?

Problema 12. Sabiendo que $n! = 1 \quad 2 \quad 3 \qquad (n \quad 1) \quad n$.
Por ejemplo: $3! = 1 \quad 2 \quad 3 = 6 \qquad 6! = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 = 720$
Si $n! = 2^{15} \quad 3^6 \quad 5^3 \quad 7^2 \quad 11 \quad 13$ hallar el valor de n.

Problema 13. En la $OMEC$ las fichas del juego dominó tienen dos mitades, y cada mitad tiene de 0 a 7 puntos, al contrario de un dominó común que va de 0 a 6. Por ejemplo, las siguientes son algunas de esas fichas:

13 00 57 04

¿Cuántas fichas diferentes tiene el dominó de la $OMEC$?

Problema 14. El área de la superficie de un cubo es $24\,cm^2$. El volumen del cubo en cm^3 es:

Problema 15. Los segmentos PS, QT y RU se intersecan en un punto común O, como se muestra en la figura. P se une a Q, R a S y T a U, para formar triángulos. El valor en grados sexagesimales de $\backslash P + \backslash Q + \backslash R + \backslash S + \backslash T + \backslash U$ es:

1.2.4 NIVEL 2

Problema 1. Los números 123 456 789 y 999 999 999 se multiplican. ¿Cuántos números 9 tiene el resultado final?

Problema 2. Sean x, y números tales que:

$$x(y+1) \quad y(x+1) = 7$$

Hallar el valor numérico de: $x(y+2) \quad y(x+2)$

Problema 3. ¿Cuál es el perímetro del único rectángulo que tiene cada una de sus diagonales longitud de 10 y sus lados longitudes enteras?

Problema 4. En la $OMEC$ las fichas del juego dominó tienen dos mitades, y cada mitad tiene de 0 a 7 puntos, al contrario de un dominó común que va de 0 a 6.. Una ficha del dominó de la $OMEC$ es llamada "*importante*" si la suma de sus puntos es par. Por ejemplo, las siguientes fichas son importantes:

13 00 57 04

¿Cuántas fichas son importantes en el dominó de la $OMEC$?

Problema 5. Para cada número natural n, se define S_n como la suma de los diez primeros múltiplos de n. Por ejemplo, $S_3 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30$.
Hallar el valor de:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \quad + S_9 + S_{10}$$

Problema 6. En la figura se conoce que $a = 18$ y $AB = AC = AD = AE$. Hallar el valor en grados sexagesimales del ángulo b

Problema 7. En la figura , E es el punto medio de AB, F es el punto medio de AC y $BR = RS = SC$. Si el área del triángulo ABC es 252. Hallar el área del pentágono $AERSF$.

Problema 8. Tanto $px + 2y = 7$ como $3x + qy = 5$ representan a la misma recta. Hallar el valor del producto pq.

Problema 9. En el triángulo isósceles ABC, se sabe que $AB = BC$ y $\backslash B = 144$. Hallar en grados sexagesimales el ángulo agudo formado por la bisectriz de $\backslash A$ con el lado BC.

Problema 10. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras distintas que se puede formar usando los dígitos $1, 2, 3, 4$?

Problema 11. En la figura, C es un punto del segmento BD tal que $ACDE$ es un rectángulo y $ABCE$ es un paralelogramo de área 22 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABDE$ en cm^2?

Problema 12. Simplificar la expresión:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 + \left(\frac{1 \quad \sqrt{5}}{2}\right)^8$$

Problema 13. Hallar la suma de todos los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$(x^2 \quad 5x + 5)^{x^2+4x \quad 60} = 1$$

Problema 14. Se define la operación binaria $?$ de la siguiente manera:

$$a ? b = ab \quad a + b$$

Por ejemplo: $2 ? 3 = (2)(3) \quad 2 + 3 = 6 \quad 2 + 3 = 7$. Hallar $(4 ? 1)^{2?2}$.

Problema 15. Hallar la cantidad de números capicúas que existen entre 1 y 2019.
Nota: La palabra capicúa en matemáticas, se refiere a cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Ejemplos: 161, 2992.

1.2.5 NIVEL 3

Problema 1. Hallar el valor numérico de:

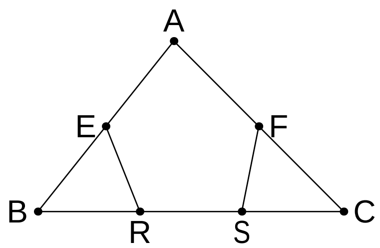
$$2019^{\log_{2020} 2021} - 2021^{\log_{2020} 2019}$$

Problema 2. Al simplificar la expresión:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

con a, b números reales diferentes de cero, se obtiene:

Problema 3. En la figura, E es el punto medio de AB, F es el punto medio de AC y $BR = RS = SC$. Si el área del triángulo ABC es 252. Hallar el área del pentágono $AERSF$



Problema 4. Un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ es *superpar* cuando cualesquiera dos de sus elementos tienen producto par. La mayor cantidad de elementos de un subconjunto superpar es:

Problema 5. Si x, y, z satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2 \end{cases}$$

Hallar el valor numérico de $x^4 + y^4 + z^4$.

Problema 6. Sea $\triangle ABC$ con $\angle B = \angle C = 70^\circ$. Sobre los lados AB y AC se encuentran los puntos F y E respectivamente, tal que $\angle ABE = 15^\circ$ y $\angle ACF = 30^\circ$. Hallar en grados sexagesimales $\angle AEF$.

Problema 7. Hallar el menor entero positivo n tal que:

$$(2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1)\cdots(n^2 - 1)$$

sea un cuadrado perfecto.

Problema 8. En la *OMEC* las fichas del juego dominó tienen dos mitades, y cada mitad tiene de 0 a 7 puntos, al contrario de un dominó común que va de 0 a 6. Una ficha del dominó de la *OMEC* es llamada "*importante*" si la suma de sus puntos es par. Por ejemplo, las siguientes fichas son importantes:

13 00 57 04

¿Cuál es la suma de los puntos de todas las fichas importantes en el dominó de la *OMEC*?

Problema 9. Sean a, b, c números reales y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c\,\mathrm{sen}(x) - 1$$

Si $f(\quad 2019) = 2019$. Hallar ${\dfrac{f(2019)}{2021}}^{2020}$.

Problema 10. Sea x un número real tal que:

$$\sec x \quad \tan x = 2$$

Hallar el valor numérico de:

$$\frac{2019}{2} + \sec x + \tan x$$

Problema 11. Un número de tres cifras en base 10 se escribe $\overline{xyz}$ en base 7 y $\overline{zyx}$ en base 9. ¿Cuál es el número?

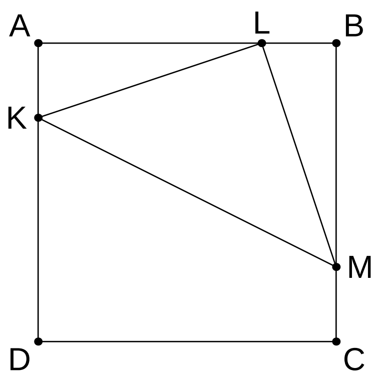
Problema 12. Las longitudes de un triángulo son: a, b, c donde cada uno de ellos son números enteros tales que:

$$a + b + c = 25$$

$$ab = 24$$

Hallar la longitud del lado más largo del triángulo.

Problema 13. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, K pertenece al lado AD, L pertenece al lado AB, M pertenece al lado BC y KLM es un triángulo rectángulo isósceles, siendo L el ángulo recto. Hallar el área del cuadrilátero $CDKM$.



Problema 14. Andrea tiene cinco libros de Química en un librero. El fin de semana ella limpió el librero, y al volver a ubicar los libros, ubicó dos de ellos en el lugar donde estaban antes y los demás en lugares diferentes de donde estaban. ¿De cuántas maneras ella puede hacer esto?

Problema 15. El primer término de una secuencia de números es $t_1 = 5$. Los términos sucesivos se definen por la regla de correspondencia $t_n \quad t_{n \ 1} = 2n + 3$, para todo $n \quad 2$. Hallar el valor de t_{10}.

1.3 TERCERA FASE

1.3.1 NIVEL B

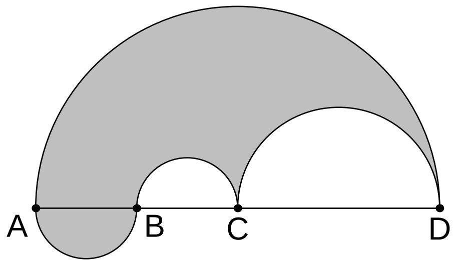
Problema 1. Encuentra el menor entero positivo tal que al multiplicarlo por 2520 resulta un entero cuadrado perfecto.

Problema 2. Hallar el mayor número de tres dígitos en la secuencia:

$$1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29,\ 36, \ldots$$

Problema 3. En Cuatrolandia solo se usan los dígitos $1, 2, 3, 4$. Jorge que vive en Cuatrolandia escribe números que tienen cuatro cifras. En cada número que escribe usa solamente dos dígitos distintos. ¿Cuántos números puede escribir Jorge?. Explica como los contaste.

Problema 4. En la figura $AD = 12\ cm$, todos los arcos son semicircunferencias, C es punto medio de AD y B es punto medio de AC.



A) ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?

B) ¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Problema 5. Se escriben en la pizarra todos los enteros positivos desde el 1 al 2019. Después, al azar se borran dos números, y se los sustituye por su diferencia. Al final de este proceso, solo queda un número. ¿Puede ser el 3?

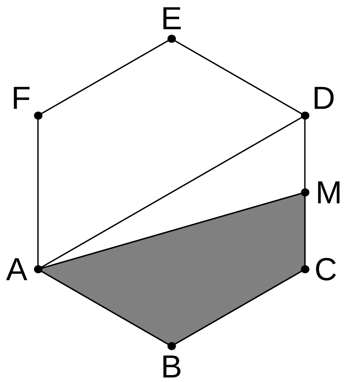
1.3.2 NIVEL A

Problema 1. La abuela de Andrea olvidó la clave de 5 dígitos para abrir su maleta y solo recuerda que:

- no tiene ningún cero,
- tiene tres dígitos que son múltiplos de 4,
- tiene dos dígitos que son múltiplos de 3,
- no tiene dígitos consecutivos iguales.

¿Cuántas son las posibles claves? Explica cómo las contaste.

Problema 2. El hexágono regular $ABCDEF$ tiene 96 cm de perímetro y M es el punto medio de CD



A) ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $ABCD$?

B) ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCM$?

Problema 3. Sea N un número de cuatro dígitos. Si $N + 25$ es un múltiplo de 8, encuentra el menor valor posible de N.

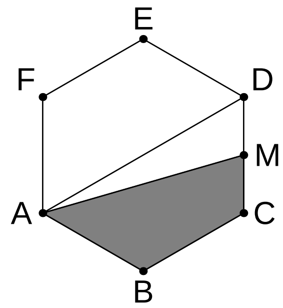
Problema 4. Hallar el producto de todos los divisores de 720.

Problema 5. Cada letra es equivalente a un dígito. A cada letra distinta se le asigna un número distinto y la palabra no puede empezar con cero (0). Encuentra la equivalencia de la palabra **AGUA** en números.

$$\begin{array}{r} TRAE \\ +TRAE \\ \underline{TRAE} \\ AGUA \end{array}$$

1.3.3 NIVEL 1

Problema 1. El hexágono regular $ABCDEF$ tiene 96 cm de perímetro y M es el punto medio de CD



A) ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $ABCD$?

B) ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCM$?

Problema 2. En un país imaginario, llamado Saskiria, un niño guarda una alcancía con 198 monedas, de dos tipos diferentes: de 3 y 0,20. Se puso a contar todo el dinero y tenía 190,80. ¿Cuántas monedas de cada tipo había en la alcancía?

Problema 3. Se dice que un entero positivo n es *creciente* si al leerlo de derecha a izquierda se obtiene un entero mayor que n. Por ejemplo, 2019 es creciente ya que 9102 es mayor que 2019.
¿Cuántos enteros positivos de cuatro dígitos son *crecientes*?

Problema 4. Danielle escoge un entero positivo $N < 1000$ y descubre que al dividirlo para 7 deja resto 5, al dividirlo para 5 deja resto 3, al dividirlo para 3 deja resto 2 y al dividirlo para 2 deja resto 1. Hallar todos los posibles valores que puede tomar N.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB = AD = 13$, $BC = CD = 20$ y $BD = 24$. Se sabe que existe una circunferencia que es tangente interiormente a los 4 lados del cuadrilátero, hallar el radio de dicha circunferencia.

1.3.4 NIVEL 2

Problema 1. Para $n \geq 2$ se define $f(n) = m$, donde m es el mayor entero positivo tal que $\sqrt[m]{n}$ sea entero. Hallar:

$$f(2) + f(3) + ... + f(100)$$

Problema 2. El punto P está en el interior de un hexágono regular de modo que las distancias hasta tres vértices consecutivos del hexágono son $8, 8, 16$ unidades, respectivamente. Halle el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono.

Problema 3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > -1$ y tales que $ab = 1$. Demostrar que:

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} \geq 4.$$

Hallar todos los casos de igualdad.

Problema 4. Sean a, b enteros positivos tales que $2a - b$, $a - 2b$ y $a + b$ son todos cuadrados perfectos distintos. Hallar el menor valor posible de b.

Problema 5. Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = BC$. Se define el punto P tal que $\angle ABP = 80^\circ$, $\angle CBP = 20^\circ$ y $AC = BP$. Hallar todos los posibles valores de $\angle BCP$.

1.3.5 NIVEL 3

Problema 1. Hallar la cantidad de triángulos de formas diferentes (NO semejantes entre sí) cuyos ángulos son todos enteros positivos (en grados).

Problema 2. Sean a, b enteros positivos tales que $2a - b$, $a - 2b$ y $a + b$ son todos cuadrados perfectos distintos. Hallar el menor valor posible de b.

Problema 3. Sea AB una cuerda de una circunferencia con centro O. Sea C un punto sobre la circunferencia tal que $\angle ABC = 30^\circ$ con O dentro del triángulo ABC. Sea D un punto sobre AB tal que $\angle DCO = \angle OCB = 20^\circ$. Hallar $\angle CDO$.

Problema 4. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1$$

Problema 5. Denotemos (x, y) al máximo común divisor de x e y. Hallar todos los conjuntos finitos y no vacíos S de enteros positivos tales que

$$\frac{i + j}{(i, j)} \in S \text{ para todos } i, j \in S$$

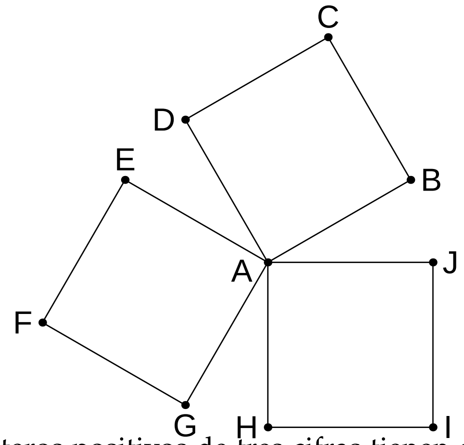
1.4 FASE FINAL

1.4.1 NIVEL B

Problema 1. Hallar el dígito de las unidades en la suma:

$$9^{2019} + 9^{2020}$$

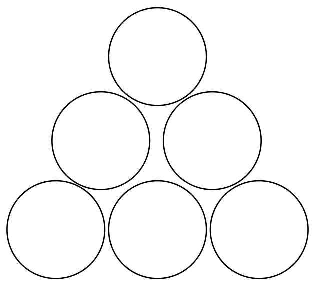
Problema 2. En la figura se muestran tres cuadrados idénticos $ABCD$, $AEFG$ y $AHIJ$, todos unidos en el punto A, donde $\measuredangle JAB = \measuredangle DAE = \measuredangle GAH$. Hallar el valor de $\measuredangle AGB$.



Problema 3. ¿Cuántos números enteros positivos de tres cifras tienen el producto de sus cifras igual a 20?

Problema 4. El número 113 es primo y cuando sus cifras se invierten se obtiene 311, que también es primo. ¿Cuántos números primos de dos cifras tienen la misma propiedad?

Problema 5. Christian quiere colocar los números: 2, 3, 4, 5, 6 y 10 en los círculos de la figura, de modo que el producto de tres números a lo largo de cada ”lado” del ”triángulo” sea la misma, y la mayor posible. ¿Cuál es este producto?



1.4.2 NIVEL A

Problema 1.

a) Hallar el menor entero positivo N tal que sus cifras sumen 2019.

b) Hallar la suma de todas las cifras del número $N + 1$.

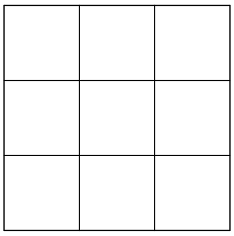
Problema 2. Los seis ángulos de dos triángulos distintos son listados en orden decreciente. La lista comienza con 115 , 85 , 75 y 35 . ¿Cuál es el último ángulo de la lista?

Problema 3. Considere los números N de tres cifras que cumplan con las siguientes propiedades:

- N no se puede dividir ni para 2 ni para 5.
- Ninguna cifra de N es exactamente divisible para 2, ni para 3, y ni para 5.

¿Cuántos enteros N existen?

Problema 4. En la figura se muestra una malla de 3 3 que contiene 9 números (fracciones), uno en cada casilla. Cada número se duplica para obtener el número que está inmediatamente a su derecha y se triplica para obtener el número que está inmediatamente debajo de él. Si la suma de los 9 números (fracciones) es 13, ¿cuál es el valor de la fracción que está en la casilla central?



Problema 5. Christian participa en el show de televisión llamado: ”El precio justo”, y ganará todos los premios, si logra encontrar el número misterioso.

El presentador del show dice: *”El número misterioso de esta noche será el mayor número de 7 cifras que cumpla las dos propiedades siguientes:*

- *En el número no hay dos cifras iguales.*
- *Cada cifra del número divide exactamente a todo el número.”*

a) Hallar las tres cifras que no pueden ser parte del número misterioso. Explique por qué deben ser excluidas.

b) Hallar el número misterioso. Explique por qué es el mayor número de 7 cifras que cumple con estas propiedades.

1.4.3 NIVEL 1

Día 1

Problema 1. Hallar cuántos números de dos dígitos son divisibles para la suma de sus dígitos.

Problema 2. El punto P se encuentra en el lado BC del triángulo ABC de tal manera que $BP = 2\ \ CP$. Demostrar que la recta AP biseca la mediana del triángulo ABC trazada desde C.

Problema 3. Una base militar tiene la forma de un triángulo equilátero de 15 km de lado. Restricciones de seguridad hacen que la comunicación por celular sólo sea posible en un rango de 3 km. 26 soldados se encargan de patrullar la base de manera aleatoria y tratan de contactar a todos los demás. Mostrar que en cada instante, al menos dos soldados están en comunicación directa a través del celular.

Día 2

Problema 4. El conjunto A consiste de 5 enteros positivos consecutivos menores que 2019, mientras que el conjunto B consiste de 9 enteros positivos consecutivos. Se sabe que la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B. ¿Cuál es el máximo posible elemento que A puede contener?

Problema 5. Sean $ABCD$ un cuadrado. Sobre los segmentos AB, BC, CD y DA se escogen puntos E, F, G y H, respectivamente, tales que

$$AE = BF = CG = DH.$$

Sean P el punto de intersección de AF y DE, Q el punto de intersección de BG y AF, R el punto de intersección de CH y BG, y S el punto de intersección de DE y CH. Demostrar que $PQRS$ es un cuadrado.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 7 7, se escribe un número real con valor absoluto menor que 1 de modo que la suma de los números en cualquier subtablero de 2 2 sea cero. Mostrar que el valor absoluto de la suma de todos los números es menor a 7.

1.4.4 NIVEL 2

Día 1

Problema 1. A un número de tres cifras $\overline{abc}$ se le llama *ecuatoriano* si cumple las siguientes condiciones:

- $\overline{abc}$ no termina en 0.
- $\overline{abc}$ es múltiplo de 36.
- $\overline{abc} - \overline{cba}$ es positivo y múltiplo de 36.

Determinar todos los números ecuatorianos.

Problema 2. Hallar cuántos valores enteros $3 \leq n \leq 99$ cumplen que el polinomio $x^2 + x + 1$ divide a $x^{2^n} + x + 1$.

Nota: Se dice que un polinomio $P(x)$ divide a un polinomio $Q(x)$ si existe un polinomio $R(x)$ tal que $Q(x) = P(x)R(x)$. Por ejemplo, $x - 1$ divide a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Problema 3. Sean ABC un triángulo y D un punto sobre el segmendo AC. La circunferencia circunscrita al triángulo BDC corta a AB nuevamente en E y la circunferencia circunscrita al triángulo ABD corta a BC nuevamente en F. Mostrar que $AE = CF$ si y sólo si BD es la bisectriz interior de $\angle ABC$.

Día 2

Problema 4. Sean $ABCD$ un cuadrado. Sobre los segmentos AB, BC, CD y DA se escogen puntos E, F, G y H, respectivamente, tales que

$$AE = BF = CG = DH.$$

Sean P el punto de intersección de AF y DE, Q el punto de intersección de BG y AF, R el punto de intersección de CH y BG, y S el punto de intersección de DE y CH. Demostrar que $PQRS$ es un cuadrado.

Problema 5. Aburrido de esperar su avión para viajar a la Olimpiada Internacional de Matemáticas, Daniel empezó a escribir potencias de 2 en una lista en su cuaderno de la siguiente manera:

- Empezando con el número 1, Daniel escribe la siguiente potencia de 2 al final de su lista e invierte el orden de los números de la lista.

Denominemos como *movimiento* a dicha modificación de la lista, incluyendo el primer paso. La lista en cada uno de los 4 primeros *movimientos* se ve de la siguiente forma:

$$1 \quad \rightarrow \quad 2, 1 \quad \rightarrow \quad 4, 1, 2 \quad \rightarrow \quad 8, 2, 1, 4$$

Daniel se plantea realizar operaciones hasta que llegue su avión, pero le preocupa que la lista crezca demasiado. Luego de 2020 *movimientos*, ¿cuál es la suma de los primeros 1010 números?

Problema 6. Sean x_0, a, b reales dados tales que $b > 0$ y $x_0 \neq 0$. Para todo entero no negativo n se escoge un valor real x_{n+1} que cumpla

$$x_{n+1}^2 = a x_n x_{n+1} + b x_n^2.$$

a) Hallar cuántos valores distintos puede tomar x_n.
b) Hallar la suma de todos los posibles valores de x_n con repeticiones en función de n, x_0, a, b.

1.4.5 NIVEL 3

Día 1

Problema 1. Hallar cuántos valores enteros $3 \le n \le 99$ cumplen que el polinomio $x^2 + x + 1$ divide a $x^{2^n} + x + 1$.

Nota: Se dice que un polinomio $P(x)$ divide a un polinomio $Q(x)$ si existe un polinomio $R(x)$ tal que $Q(x) = P(x)R(x)$. Por ejemplo, $x - 1$ divide a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Problema 2. Sean ABC un triángulo y D un punto sobre el segmendo AC. La circunferencia circunscrita al triángulo BDC corta a AB nuevamente en E y la circunferencia circunscrita al triángulo ABD corta a BC nuevamente en F. Mostrar que $AE = CF$ si y sólo si BD es la bisectriz interior de $\angle ABC$.

Problema 3. Para todo entero positivo n, hallar la máxima potencia de 2 que divide al número

$$1 + 2019 + 2019^2 + 2019^3 + \ldots + 2019^{n-1}.$$

Día 2

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero positivo. Danielle elige un número N de n dígitos pero no se lo dice a sus alumnos y ellos deben hallar la suma de los dígitos de N. Para lograrlo cada alumno escoge y dice una vez un número de n dígitos a Danielle y ella dice cuántos dígitos están en la ubicación correcta en comparación con N. Hallar la mínima cantidad de alumnos que debe haber en la clase para asegurar que los alumnos tienen una estrategia para hallar correctamente la suma de los dígitos de N en cualquier caso y mostrar una estrategia en dicho caso.

Problema 5. Sean a, b, c enteros no todos iguales que cumplen:

$$\begin{aligned} a, b, c &\ge 4 \\ 4abc &= (a + 3)(b + 3)(c + 3) \end{aligned}$$

Hallar el valor numérico de $a + b + c$.

Problema 6. Sea $n \ge 3$ un entero positivo. Danielle dibuja una *flor matemática* en el plano cartesiano de la siguiente manera: primero dibuja una circunferencia unitaria centrada en el origen, luego dibuja un polígono de n vértices con ambas coordenadas racionales sobre la circunferencia de modo que tiene dos vértices diametralmente opuestos, en cada lado dibuja una circunferencia que tiene como diámetro a dicho lado, y finalmente pinta el área en el interior de las n circunferencias pequeñas pero en el exterior de la circunferencia unitaria. Si se sabe que el área pintada es racional, hallar todos los posible polígonos dibujados por Danielle.

1.4.6 NIVEL U

Día 1

Problema 1. Sea b un real positivo. A_1 es una matriz cuadrada con entradas reales y diagonalizable e I es la matriz identidad de igual tamaño que A_1. Para todo $n \geq 1$ se define

$$A_{n+1} = 2019A_n^2 + bI.$$

Para toda matriz A_1 para la cual el límite $\lim_{n \to \infty} A_n$ existe, se sabe que $\lim_{n \to \infty} A_n = C$ para la misma matriz C. Hallar b y C.

Nota: Se dice que $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ si para cada entrada $(A_n)_{i,j}$ se cumple $\lim_{n \to \infty}(A_n)_{i,j} = A_{i,j}$.

Problema 2. a) Sea $f(x)$ una función continua y diferenciable dos veces en un intervalo cerrado I. Se sabe que existe un triángulo no degenerado cuyos vértices y su centroide pertenecen a la curva de f en el plano cartesiano. Mostrar que existe $c \in I$ tal que $f'''(c) = 0$.
b) Sea Γ una cónica no degenerada en el plano. Demostrar que existe un triángulo no degenerado cuyos vértices y su centroide pertenecen a Γ si y sólo si Γ es una hipérbola.

Problema 3. Un polígono regular de n lados está inscrito en una circunferencia de radio 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ las distancias de uno de los vértices del polígono a todos los otros vértices. Demostrar que

$$(5 - a_1^2)(5 - a_2^2)\ldots(5 - a_{n-1}^2) = F_n^2$$

donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Nota: La sucesión de Fibonacci cumple: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 0$.

Día 2

Problema 4. Se define la sucesión a_n como $a_0 = 2019^{-2}$, $a_1 = 2019^{-6}$ y

$$a_{n+2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^6 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

a) Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
b) Hallar el máximo valor de $A > 0$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n \cdot 2019^{A^n} = 0.$$

Problema 5. Blancanieves debe decidir cuál de sus n enanitos llevar a su siguiente expedición. Habiéndose graduado recientemente de su doctorado en matemáticas, Blancanieves diseña un proceso justo que decidirá quién la acompañará. Los n enanitos se sientan en su mesa redonda. Cada enanito recibe al azar uno de n papelitos numerado del 1 al n. Inicialmente, cada enanito le susurra su número a su vecino de la izquierda. Cuando un enanito escucha un número x de su vecino, lo compara con el número y de su papel:

- Si $x > y$, en la siguiente ronda susurrará x a su vecino.
- Si $x < y$, el enanito ignora el número escuchado (no susurrará nada en la siguiente ronda).
- Si $x = y$, el enanito se levanta de la mesa y se proclama elegido para la expedición.

a) Sea $P(i,k)$ la probabilidad que el número i sea susurrado k veces. Hallar $P(i,k)$.
b) Sea k el número total de susurros del proceso y $\mathbb{E}(k)$ su valor esperado. Demostrar que:

$$\mathbb{E}(k) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Problema 6. Sean n, m enteros positivos. Se define $V(n,m)$ como el volumen de la figura compuesta por todos los puntos con coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que cumplen

$$\lfloor x_1 \rfloor^2 + \lfloor x_2 \rfloor^2 + \lfloor x_3 \rfloor^2 + \dots + \lfloor x_n \rfloor^2 \le m$$

a) Hallar $V(n,4)$.
b) Evaluar

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V(n,4) - V(n,1)}{V(n,2) - V(n,3)}.$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera del número real x y es igual al mayor entero que es menor o igual que x.

2 SOLUCIONES

2.1 PRIMERA FASE

2.1.1 NIVEL B

Solución del problema 1:

$$\begin{aligned} & 6 \quad 1000 + 5 \quad 100 + 4 \quad 10 + 10 \\ = & (6 \quad 1000) + (5 \quad 100) + (4 \quad 10) + 10 \\ = & 6000 + 500 + 40 + 10 \\ = & 6540 + 10 \\ = & 6550 \end{aligned}$$

Solución del problema 2: Los números a partir del segundo en la lista, es la mitad del anterior, con lo cual el número perdido es 20.

Solución del problema 3: Por descarte una jirafa adulta no puede tener ni 5 mm, 5 cm, 50 cm ó 5 km, por lo tanto su altura aproximadamente es 5 m.

Solución del problema 4: Entre 8:30 y 9:00 pasaron 30 minutos
Entre 9:00 y 9:05 pasaron 5 minutos
El total de la duración de la clase es 35 minutos.

Solución del problema 5: El número se escribe como 43 033

Solución del problema 6: La figuras que se obtienen son dos trapecios.

Solución del problema 7: La palabra vista desde el otro lado de la ventana es ƧADAIꟼMI⅃O

Solución del problema 8: Durante todos los días del año se mostrará esa hora, es decir que se mostrará 365 veces.

Solución del problema 9: Para que un número sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos debe ser un múltiplo de 3 también, por tanto solo el 2019 cumple esa condición puesto que $2 + 0 + 1 + 9 = 12$

Solución del problema 10: Se sabe que $\frac{76}{4} = 19$, es decir $76 = 19 + 19 + 19 + 19 = 2(19) + 19 + 19$, por tanto la edad del padre es 38 y la edad de Arnaldo y Bernardo es 19

Solución del problema 11: Cada gato y cordero tienen 4 patas, de la misma forma cada pato y ganso tiene 2 patas, por lo tanto:

Con 3 gatos se tienen $3 \quad 4 = 12$ patas
Con 4 patos se tienen $4 \quad 2 = 8$ patas
Con 2 gansos se tienen $2 \quad 2 = 4$ patas

Hasta ahora se pueden contar $12 + 8 + 4 = 24$ patas para completar las 44 que contó el profesor búho, es decir que faltan 20 patas correspondientes a los corderos, pero como cada cordero tiene 4 patas, entones existen $\dfrac{20}{4} = 5$ corderos.

Solución del problema 12: Si mi gato ronronea 50 minutos por cada hora, eso quiere decir que no ronronea 10 minutos por cada hora, con lo cual no ronronea $24 \quad 10 = 240$ minutos al día, que es equivalente a no ronronear durante $\frac{240}{60} = 4$ horas, por lo tanto ronronea durante 20 horas.

Solución del problema 13: En quinientas monedas de 5 centavos tengo $500 \quad 0.05 = 5 \quad 100 \quad 0.05 = 5 \quad 5 = 25$ dólares. Y cada dolar es equivalente a 4 monedas de 25 centavos, es decir, debo recibir $25 \quad 4 = 100$ monedas de 25 centavos.

Solución del problema 14: Si el perímetro de cada cuadrado pequeño es 4, entonces cada lado del cuadrado pequeño mide 1, luego el cuadrado $ABCD$ esta formado por 8 lados de los cuadrados pequeños, por tanto tiene perímetro 8.

Solución del problema 15: Podemos llenar la tabla de la siguiente manera:

4	18	8
	10	x
12	2	16

Por tanto el valor de $x = 30 \quad 8 \quad 16 = 6$

Solución del problema 16: Nos damos cuenta que en la secuencia cada número está escrito el número de veces correspondiente al valor del mismo número , es decir que el 1 se escribe una vez, el 2 se escribe dos veces, el tres se escribe tres veces, así sucesivamente hasta escribir el 10 diez veces. Por tanto la cantidad de numeros enteros de la secuencia es:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ = & (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) \\ = & 11 \quad 5 \\ = & 55 \end{aligned}$$

Solución del problema 17: Entre 10 y 99 existen $99 \quad 10 + 1 = 90$ números, de los cuales la mitad son impares, con lo cual 45 son impares y 4 son menores que 18, por lo tanto existen $45 \quad 4 = 41$ números impares de 2 dígitos mayores que 18

Solución del problema 18: La única forma de obtener 15 puntos en 6 partidos es ganar 5 y perder 1, puesto que $3(5) + 0(1) = 15$

Solución del problema 19: La suma de los dígitos de 2019 es $2 + 0 + 1 + 9 = 12$, que no es número primo.
La suma de los dígitos de 2020 es $2 + 0 + 2 + 0 = 4$, que no es número primo.
La suma de los dígitos de 2019 es $2 + 0 + 2 + 1 = 5$, que sí es número primo.
Por tanto deben pasar 3 años para que la suma de los dígitos de un año sea un número primo.

Solución del problema 20: Si Momo comió 3 frutillas, entonces comió 2 manzanas, por tanto comió $3 + 2 = 5$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 2 = 6$ frutillas, entonces comió $2 \quad 2 = 4$ manzanas, por tanto comió $6 + 4 = 10$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 3 = 9$ frutillas, entonces comió $2 \quad 3 = 6$ manzanas, por tanto comió $9 + 6 = 15$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 4 = 12$ frutillas, entonces comió $2 \quad 4 = 8$ manzanas, por tanto comió $12 + 8 = 20$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 5 = 15$ frutillas, entonces comió $2 \quad 5 = 10$ manzanas, por tanto comió $15 + 10 = 25$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 6 = 18$ frutillas, entonces comió $2 \quad 6 = 12$ manzanas, por tanto comió $18 + 12 = 30$ frutas.
Si Momo comió $3 \quad 7 = 21$ frutillas, entonces comió $2 \quad 7 = 14$ manzanas, por tanto comió $21 + 14 = 35$ frutas.

Finalmente Momo comió 14 manzanas.

Solución del problema 21: Si a, b, c son números reales, para que exista el triángulo de lados a, b, c se deben cumplir simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

Los únicos valores que cumplen las tres condiciones son los números $2, 3, 4$.

2.1.2 NIVEL A

Solución del problema 1: $\frac{8}{4} \quad 2 \quad + \quad 4 \quad \frac{2}{8} \quad = 4 + 1 = 5$

Solución del problema 2: El par de códigos 1101   0001 no representan dos calcetines bien emparejados, puesto que el tercer dígito de izquierda a derecha no ha cambiado de 0 a 1.

Solución del problema 3:
Solución A
3(40)   60 = 60, no cumple la condición.
3(50)   60 = 90, no cumple la condición.
3(60)   60 = 120, no cumple la condición.
3(70)   60 = 150. no cumple la condición.
3(80)   60 = 180, sí cumple la condición.

Solución B
Si al restarle a un número 60 queda 180, entonces el numero es 180 + 60 = 240 y puesto que 240 es el triple del número, al dividirlo entre 3 hallamos el número 80.

Solución del problema 4: En quinientas monedas de 5 centavos tengo 500   0.05 = 5   100   0.05 = 5   5 = 25 dólares. Y cada dolar es equivalente a 4 monedas de 25 centavos, es decir, debo recibir 25   4 = 100 monedas de 25 centavos.

Solución del problema 5: Si el perímetro de cada cuadrado pequeño es 4, entonces cada lado del cuadrado pequeño mide 1, luego el cuadrado $ABCD$ esta formado por 8 lados de los cuadrados pequeños, por tanto tiene perímetro 8.

Solución del problema 6: Todas las frases se leen igual de izquierda a derecha y viceversa.

Solución del problema 7:
Solución A Sea M el libro de matemáticas, F el de física y Q el de química, los cuales se pueden ordenar de la siguiente forma:

$$MFQ$$
$$MQF$$
$$FMQ$$
$$FQM$$
$$QFM$$
$$QMF$$

Solución B Puesto que tengo tres espacios disponibles, en uno de ellos puedo ubicar 3 libros, en otro espacio puedo ubicar 2 libros, y en el último espacio solo puedo ubicar 1 libro, por tanto los puedo ordenar de 3   2   1 = 6 formas.

Solución del problema 8: Puesto que P y Q representan un solo dígito cada uno, la única manera que la columna de las unidades sumen 6, se da con $Q = 2$, luego para que la columna de las decenas sumen 7, se da con $P = 3$, y esto se comprueba con la columna de las centenas. Luego $P + Q = 5$

Solución del problema 9: Para los números primos menores que 15 tenemos:
Con lo cual existen 3 números Superprimos menores que 15.

Solución del problema 10: 2004 es el doble de 1002 y se halla a 3 unidades de numero 2001
4006 es el doble de 2003, y se halla a 1004 unidades del número 3002.

Primo	Duplicado	Restado 1	
2	4	3	Sí es primo
3	6	5	Sí es primo
5	10	9	No es primo
7	14	13	Sí es primo
11	22	21	No es primo
13	26	25	No es primo

4668 no puede ser el doble del número 8664.
3006 no puede ser el doble del número 6003.
4028 es el doble de 2014, y se halla a 74 unidades del número 4102.
Por lo tanto 1002 es casi la mitad de 2001 cuando el orden de sus dígitos se invierte.

Solución del problema 11: Para calcular el promedio de seis números, sumamos los números y dividimos esa suma entre 6.
En ese caso, ya que el promedio es 49, la suma de los seis números es $49 \quad 6 = 294$.
Si se resta 6 a dos de los números, se está restando 12 a la suma, con lo cual la suma ahora es $294 \quad 12 = 282$ y el promedio es $\frac{282}{6} = 47$

Solución del problema 12: Da lo mismo hallar todos los números divisibles para 11 entre 10 y 100, que hallar todos los números que son múltiplos de 11 entre 10 y 100. Luego los números son:

$$11 \quad 1, 11 \quad 2, 11 \quad 3, 11 \quad 4, 11 \quad 5, 11 \quad 6, 11 \quad 7, 11 \quad 8, 11 \quad 9$$

Por tanto existen 9 números que son divisibles para 11 entre 10 y 100

Solución del problema 13: Puesto que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 , y al ser rectángulo, uno de ellos necesariamente tiene que medir 90 , solo restan 90 como suma de los dos ángulos faltantes, por lo que es imposible que uno solo de ellos mida 120

Solución del problema 14: Completando la figura podemos apreciar un triángulo rectángulo sombreado, donde AB es su hipotenusa, la que se puede hallar ya que conocemos sus catetos.

Solución del problema 15: Un pentágono tiene 5 lados , un trapezoide tiene 4 lados, un hexágono tiene 6 lados, por tanto se tiene: $5 + 4 \quad 6 = 3$ son el número de lados de un triángulo.

Solución del problema 16: La siguiente hora que muestra todos sus dígitos iguales es 11:11, luego desde las 5:55 hasta las 10:55 deben pasar 5 horas = $5 \quad 60$ minutos = 300 minutos, luego deben pasar 5 minutos para las 11:00 y 11 minutos más para las 11:11. Por lo tanto deben transcurrir $300 + 5 + 11 = 316$ minutos para que el reloj muestre nuevamente todos los dígitos iguales.

Solución del problema 17: Cuando yo tenia 6 años mi hermana tenia la mitad de mi edad, es decir que tenía 3 años, con lo cual la diferencia de edades es de 3 años. Si ahora tengo 70 años, la diferencia de edades también debe ser de 3 años, por lo tanto mi hermana tiene 67 años.

Solución del problema 18: Siete días después del viernes será viernes, y siete días después ocurrirá lo mismo, luego en 2019 días podemos formar 288 grupos de siete días, sobrando 3 días, si no sobrase nada, sería también viernes, pero al sobrar 3 días, contamos: sábado, domingo y lunes. Por lo tanto después de 2019 días será lunes.

Solución del problema 19: Existen 10 cuadrados que tienen como vértices los puntos de la figura.

Solución del problema 20: Si a, b, c son números reales, para que exista el triángulo de lados a, b, c se deben cumplir simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

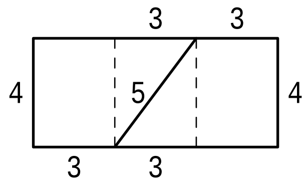
Los únicos valores que cumplen las tres condiciones son los números $2, 3, 4$.

2.1.3 NIVEL 1

Solución del problema 1: $20 + 24 + 28 + 38 + 42 = 152$. Luego $\frac{152 - 38}{38} = \frac{152}{38} - \frac{38}{38} = 4 - 1 = 3$, con lo cual 38 es el número buscado.

Solución del problema 2: Si $\frac{1}{8}$ de un número es $\frac{1}{5}$, entonces el número es $\frac{8}{5}$, puesto que $\frac{\frac{8}{5}}{8} = \frac{1}{5}$, luego $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$

Solución del problema 3:



Haciendo los siguientes trazos, podemos darnos cuenta que se forman dos triángulos rectángulos, cada uno con hipotenusa 5 y uno de sus catetos 3. Luego usando el teorema de Pitágoras tenemos: $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Con lo cual es área del rectángulo es $(3 + 3 + 3) \times 4 = 9 \times 4 = 36$

Solución del problema 4: Utilizando las alternativas vemos que solo se cumple la igualdad con $x = 9$, puesto que $\sqrt{9} + \sqrt{9} = \sqrt{36}$

Solución del problema 5: Suponga que el área del círculo más pequeño es 1, entonces el anillo central sombreado tiene área 6, con lo cual el anillo exterior tiene área 12, por tanto el círculo más grande tiene área $1 + 6 + 12 = 19$ y el círculo más pequeño es $\frac{1}{19}$ del área del círculo más grande.
Nota: Asumimos que el área del círculo más pequeño era 1, sin embargo, podríamos haber asumido que tiene cualquier área.

Solución del problema 6: Usando las opciones vemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
81 &\neq 2(8 + 1)\\
78 &\neq 2(7 + 8)\\
28 &\neq 2(2 + 8)\\
18 &= 2(1 + 8)\\
11 &\neq 2(1 + 1)
\end{aligned}
$$

Luego solo el número 18 cumple la condición.

Solución del problema 7: Cada pareja de casados puede sentarse de 2 formas distintas y juntos forman dos bloques que también pueden disponerse de 2 maneras, con lo cual las dos parejas pueden sentarse de $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneras distintas.

Solución del problema 8: Cualquier grupo pueden estar conformado únicamente por 1 ó -1, de la siguiente manera:
Si no tiene ningún número -1, su suma es 6.
Si tiene dos números -1, su suma es 2.
Si tiene cuatro números -1, su suma es -2.
Si tiene seis números -1, su suma es -6.
Por tanto su suma nunca podrá ser 0.

Solución del problema 9: Para calcular el promedio de seis números, sumamos los números y dividimos esa suma entre 6.
En ese caso, ya que el promedio es 49, la suma de los seis números es $49 \cdot 6 = 294$.
Si se resta 5 a cada uno de los números, se está restando $6 \cdot 5 = 30$ a la suma, con lo cual la suma ahora es $294 - 30 = 264$ y el promedio es $\dfrac{264}{6} = 44$

Solución del problema 10: Dado que $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \dfrac{x}{y} = -1 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2019} = (-1)^{2019} \Rightarrow \dfrac{x^{2019}}{y^{2019}} = (-1)^{2019} = -1$

Solución del problema 11: El 1000% de un número es igual al número multiplicado por 10, por tanto el número es 10.

Solución del problema 12: Para aquellos números de tres cifras que empiezan con 5, los otros dos dígitos deben sumar 7, y se dan con los números: $07, 70, 16, 61, 25, 52, 32, 23, 41, 14$

Para aquellos números de tres cifras que empiezan con 6, los otros dos dígitos deben sumar 6, y se dan con los números: $06, 60, 15, 51, 24, 42, 33$

Solución del problema 13: $10000^{9999} = (10^4)^{9999} = 10^{39996}$ este número es un 1 seguido de 39996 ceros, por lo tanto tiene 39997 dígitos.

Solución del problema 14: Todos los números de la lista cumplen la propiedad de ser mayor a la suma de sus dígitos, por tanto tenemos $99 - 10 + 1 = 90$ números con esa propiedad.

Solución del problema 15: Debo tener 4 monedas de 1 centavo, luego necesito 3 monedas con valor de 45 centavos, es decir necesito una moneda de 25, y además necesito dos monedas con valor de 20 centavos, que son 2 monedas de 10 centavos. Por lo tanto no tengo ninguna moneda de 5 centavos en mi bolsillo.

Solución del problema 16: Si el $\triangle ADE$ es equilátero, entonces $\angle DAE = 60^\circ$ y puesto que $\angle DAB = 90^\circ$ ya que $ABCD$ es un cuadrado, podemos concluir que $\angle BAE = 30^\circ$

Solución del problema 17: Con las letras C, E, M, O se pueden formar $4! = 24$ palabras sin repetición y la palabra $OMEC$ es la última de la lista en orden alfabético, por tanto ocupa la posición 24. Entonces A es un lobo, luego B es un lobo, C es un perro, D es un lobo y E es un lobo (y A es un lobo). Se concluye que hay 4 lobos.

Solución del problema 18: Puesto que $ABCDE$ es un pentágono regular, entonces $\angle CDE = 108^\circ$, del mismo modo, al ser $CDFG$ un cuadrado, entonces $\angle FDC = 90^\circ$, y también al ser DFH un triángulo equilátero, entonces $\angle HDF = 60^\circ$, con lo cual $\angle EDH = 360^\circ - 108^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 102^\circ$
Al ser todas las figuras regulares, tenemos que $AB = BC = CD = DE = CG = GF = FD = DH$, es decir el triángulo HDE es isósceles, con lo cual $b = \angle DHE = \angle HED = 39^\circ$

Solución del problema 19: Dado que los círculos son mutuamente tangentes, los segmentos que unen sus centros pasan a través de los puntos de tangencia. Por lo tanto, los lados de $\triangle ABC$ tienen longitudes 6, 8 y 10. Luego se cumple $10^2 = 6^2 + 8^2$, es decir que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\angle A = 90^\circ$

Solución del problema 20: Manipulamos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2^4 + a^b &= 2^5 \\ 16 + a^b &= 32 \\ a^b &= 32 \quad 16 \\ a^b &= 16 \end{aligned}$$

luego podemos hallar las soluciones reemplazando los valores de a y b, sabiendo que $2^4 = 4^2 = 16^1 = 16$, con lo cual tenemos los pares de enteros (a, b):

$$\begin{aligned} (2,4) &\Rightarrow 2 + 4 = 6 \\ (4,2) &\Rightarrow 4 + 2 = 6 \\ (16,1) &\Rightarrow 16 + 1 = 17 \end{aligned}$$

por lo tanto el máximo valor de $a + b$ es 17.

2.1.4 NIVEL 2

Solución del problema 1: El número $10^{101} - 1 = \underbrace{99\cdots99}_{101\text{ veces}}$ por lo tanto la suma de los dígitos de este número es $9 \times 101 = 909$

Solución del problema 2: Si tres décimas partes de nuestro planeta están cubiertas de tierra, entonces siete décimas o el 70% están cubiertas de agua. Si el 97% de esta agua es agua salada, entonces solo el 3% es agua dulce. Esto implica que el 3% del 70% ó $\frac{70 \times 3}{100} = \frac{21}{10} = 2.1\%$ de nuestro planeta esta cubierto de agua dulce.

Solución del problema 3: Sabemos que $7 < 3^2 < 2^4 \Rightarrow 7^{10} < (3^2)^{10} < (2^4)^{10} \Rightarrow 7^{10} < 3^{20} < 2^{40} \Rightarrow c < b < a$

Solución del problema 4: Para que $\frac{3}{x+1}$ sea un entero, $x+1$ debe ser un divisor de 3, es decir, puede tomar los valores de: $-3, -1, 1, 3$

Si $x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$
Si $x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$
Si $x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$
Si $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

Por lo tanto existen 4 valores enteros para x, con los cuales $\frac{3}{x+1}$ es también entero.

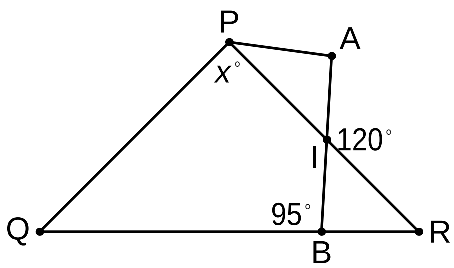
Solución del problema 5: El número de banderas de cuatro colores con todos los colores distintos es $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Solución del problema 6: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ los números cuya diferencia es 1, y sea $S \in \mathbb{Z}$ la suma de ambos números. Por tanto podemos escribir las ecuaciones:

$$a - b = 1$$
$$a + b = S$$

Sumando las ecuaciones tenemos: $2a = S + 1 \Rightarrow S = 2a - 1$, es decir que S es un número impar, por lo tanto solo puede ser 2019.

Solución del problema 7:



En $\triangle IBR$ tenemos $\angle BIR = 60^\circ$ por ser suplemento de 120° y $\angle RBI = 85^\circ$ por ser suplemento de 95°, por tanto $\angle PRQ = 35^\circ$ puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Sabiendo que $\triangle PRQ$ es isósceles con $PQ = PR$ tenemos que $\angle PRQ = \angle RQP = 35^\circ$, entonces $x = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$

Solución del problema 8: Para que un número sea divisible entre 4, las dos últimas cifras deben ser divisibles entre 4, con lo cual se pueden formar los cinco números siguientes: $\{12, 24, 32, 44, 52\}$, luego en las dos primeras posiciones pueden estar 5 números cualquiera, es decir, se tienen $5 \times 5 \times 5 = 125$ números de cuatro dígitos que son divisibles entre 4.

Solución del problema 9: Podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$187x = 104y + 41$$

Usando el par $(314, 565)$ y fijándonos en el dígito de las unidades, tenemos que $187x$ termina en 8 mientras que $104y + 41$ termina en 1, por lo tanto el par $(314, 565)$ no puede satisfacer la ecuación.

Solución del problema 10: Del triángulo ABD sabemos su área, por tanto: $\dfrac{(AB)(BC)}{2} = 50 \Rightarrow \dfrac{(\frac{25}{2})(BC)}{2} = 50 \Rightarrow BC = 8$

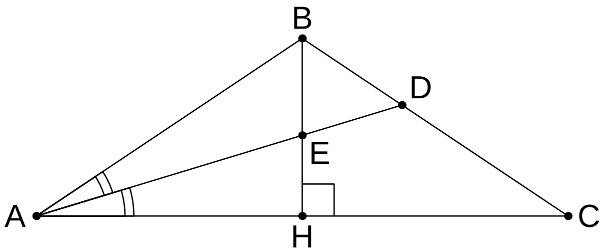
Si $BC = 8$ y D es el punto medio de CD, entonces $CD = DB = 4$, con lo cual el radio de la semicircunferencia de arco $\overline{BC}$ es 4.

Ademas ya podemos decir que el diámetro de la semicircunferencia de arco $\overline{CD}$ es 4 y por tanto su radio es 2. Ahora podemos averiguar el área sombreada:

$$\begin{aligned} A_{sombreada} &= A_{\triangle ABD} + A_{arco\,\overline{BC}} - A_{arco\,\overline{CD}} \\ A_{sombreada} &= \frac{(\frac{25}{2})(4)}{2} + \frac{4^2\pi}{2} - \frac{2^2\pi}{2} \\ A_{sombreada} &= 25 + 6\pi \end{aligned}$$

Solución del problema 11: Si el número tiene 3 dígitos, para la primera y segunda posición se pueden ubicar 5 números (1, 3, 5, 7, 9), mientras que para la última posición también se pueden ubicar 5 números (0, 2, 4, 6, 8), con lo cual existen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números.

Solución del problema 12:



Sea D la intersección entre la bisectriz de $\angle A$ y el lado BC, sea H el pie de la altura del $\triangle ABC$ desde B y sea E la intersección de la altura con la bisectriz, es decir los ángulos que se forman por la bisectriz de $\angle A$ con la altura correspondiente al lado AC son $\angle BEA$ y $\angle AEH$.

Puesto que $\triangle ABC$ es isósceles con $BA = BC$ se tiene que $\angle CAB = \angle BCA = 18^\circ$ y además BH es altura y bisectriz, por tanto $\angle HBC = \angle ABH = 72^\circ$.

Por otra parte tenemos que AD es bisectriz, entonces $\angle CAD = \angle DAB = 9^\circ$. Con lo cual en $\triangle AEB$ tenemos que $\angle BEA = 180^\circ - 72^\circ - 9^\circ = 99^\circ$ y por tanto $\angle AEH = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$ que es el ángulo agudo buscado.

Solución del problema 13: Multiplicando las dos ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} (x^2yz^3)(xy^2) &= (2019^3)(2019^9) \\ x^3y^3z^3 &= 2019^{12} \\ (xyz)^3 &= (2019^4)^3 \\ xyz &= 2019^4 \end{aligned}$$

Solución del problema 14: Sea $a = \angle DCA$ y $b = \angle DCB$. Luego sabemos que el triángulo ACB es isósceles puesto que $AC = AD$, con lo cual $\angle ACD = \angle CDA = a$. Además sabemos que el triángulo DBC es isósceles puesto que $DC = DB$, con lo cual $\angle DBC = \angle BCD = b$. Y también sabemos que el triángulo ABC es isósceles puesto que $CA = CB$, con lo cual $\angle CBA = \angle BAC = b$.

En $\triangle ACD$: $2a + b = 180$
En $\triangle CBD$: $a = 2b$

Reemplazando la una ecuación en la otra tenemos: $2(2b) + b = 180 \Rightarrow b = 36$ y con lo cual $a = 2(36) = 72$. Se concluye que $\angle ACB = a + b = 108$

Solución del problema 15: Los números que arrollan a 314 son números de tres dígitos, y tomando en cuenta los dígitos de izquierda a derecha, podemos ubicar $6 \times 8 \times 5 = 240$

Solución del problema 16: Sin tomar en cuenta el color de los dados las parejas tal que su suma es divisible entre 3 son:

$$(Dado_1, Dado_2) \in \{(1,1); (1,5); (2,4); (3,3); (3,6); (4,5); (6,6)\}$$

Luego si tomamos en cuenta el color de los dados, debemos recordar que el par (3,3) y (6,6) no cambia, al cambiar de color el dado, por tanto tenemos $2 \times 7 - 2 = 12$ formas diferentes de lanzar los dados.

Solución del problema 17: $\dfrac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11 \Rightarrow \dfrac{\frac{ab + ac + bc}{bc}}{\frac{bc + ba + ac}{ac}} = 11 \Rightarrow \dfrac{ac}{bc} = 11 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 11 \Rightarrow a = 11b$

Luego $a + 2b + c \leq 40 \Rightarrow 11b + 2b + c \leq 40 \Rightarrow c \leq 40 - 13b$

Si $b = 1 \Rightarrow a = 11 \Rightarrow c \leq 27$, y se tienen 27 soluciones
Si $b = 2 \Rightarrow a = 22 \Rightarrow c \leq 14$, y se tienen 14 soluciones
Si $b = 3 \Rightarrow a = 33 \Rightarrow c \leq 1$, y se tiene 1 solución

Por lo tanto la expresión tiene $27 + 14 + 1 = 42$ ternas de enteros positivos (a, b, c) que la satisfacen.

Solución del problema 18: Debemos recordar que n términos elevados al cuadrado, producen la suma de los n términos elevados al cuadrado cada uno, adicionalmente se suma el doble de la suma de todas las parejas tomadas dos a dos. Por lo tanto, la expresión tiene $9 + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$ términos.

Solución del problema 19: Debemos recordar que un prisma rectangular (u ortoedro) es un poliedro cuya superficie está formada por dos rectángulos iguales y paralelos llamados bases y por cuatro caras laterales que son también rectángulos paralelos e iguales dos a dos.

Luego sea $a = FE = GH = BC = AD$, $b = FG = AB = DC = EH$, $c = HC = GB = ED = FA$, y usando la definición de prisma rectangular tenemos que $4a + 4b + 4c = 24 \Rightarrow a + b + c = 6$ y además $2bc + 2ac + 2ab = 11 \Rightarrow 2(bc + ac + ab) = 11$

El segmento $AH = \sqrt{\left(\sqrt{BC^2 + AB^2}\right)^2 + HC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Usando la identidad:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$
$$6^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 11$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 25$$

Por lo tanto $AH = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{25} = 5$

Solución del problema 20: Escribimos la secuencia de la siguiente manera:

$$2^{300}, 2^{298}, 2^{296}, 2^{294}, \ldots 2^{4}, 2^{2}, 2^{0}, \ldots$$
$$2^{2\ 150}, 2^{2\ 149}, 2^{2\ 148}, 2^{2\ 147}, \ldots 2^{2\ 2}, 2^{2\ 1}, 2^{2\ 0}, \ldots$$

claramente $2^0 = 1$ es el único número entero impar, y antes de este número existen 150 términos, por lo tanto $2^0 = 1$ ocupa la posición 151.

2.1.5 NIVEL 3

Solución del problema 1: Existen 6 números que comienzan con 1, además 6 números que empiezan con 2, los dos primeros números que empiezan con 3, son 3124,3142, luego el número 3142 se encuentra en la posición $6+6+2=14$

Solución del problema 2:

$$X = 1+\frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0 \Rightarrow X_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Y = 2+\frac{1}{Y} \Rightarrow Y^2 - 2Y - 1 = 0 \Rightarrow Y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow Y = 1+\sqrt{2}$$

Calramente $X \neq Y$ así como $2X+Y \neq 2$, por tanto se cumple que $2X > Y$

Solución del problema 3: Usando los puntos $A(-9,-2)$ y $B(6,8)$, sabemos que $3y = 2x+12$ es la recta que pasa por ambos puntos, la que podemos escribir como $3y = 2(x+6)$, con lo cual apreciamos que el lado derecho es par, y por tanto el lado izquierdo también debe ser par, y eso ocurre con $y = -2,0,2,4,6,8$,que genera los 6 puntos: $(-9,-2),(-6,0),(-3,2),(0,4),(3,6),(6,8)$, todos con ambas coordenadas enteras.

Solución del problema 4: Racionalizando el término general de la suma:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{n-(n+2)} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$$

Luego escribimos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}\\
&=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{2}\\
&=\frac{3-1}{2}\\
&=1
\end{aligned}$$

Solución del problema 5: $\dfrac{a}{1+a+ab} = \dfrac{ac}{c(1+a+ab)} = \dfrac{ac}{c+ac+abc} = \dfrac{ac}{1+c+ac}$

$$\frac{b}{1+b+bc} = \frac{abc}{ac(1+b+bc)} = \frac{abc}{ac+abc+abc^2} = \frac{1}{1+c+ac}$$

Luego podemos escribir:

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ac} = \frac{ac}{1+c+ac}+\frac{1}{1+c+ac}+\frac{c}{1+c+ac} = \frac{1+c+ac}{1+c+ac} = 1$$

Solución del problema 6: Sea $S = 1+2+\cdots+2019 = \dfrac{(2019)(2020)}{2} = (2019)(1010)$

Luego podemos escribir:

$$\begin{aligned}
A &= (2019)(1+2+\cdots+2020) = (2019)(S+2020) = 2019S+(2019)(2020)\\
B &= (2020)(1+2+\cdots+2019) = (2019+1)S = 2019S+S = 2019S+(2019)(1010)
\end{aligned}$$

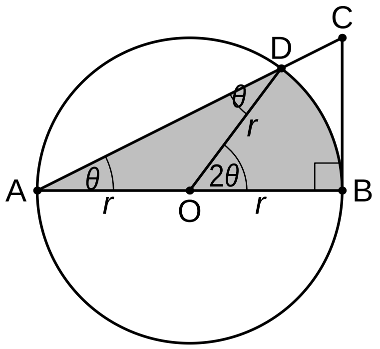
Por lo tanto $A > B$ y claramente $2A \neq B$ y $2B \neq A$.

Solución del problema 7:

$$a = log_{14}28 = log_{14}(14\cdot 2) = 1+log_{14}2 = 1+\frac{1}{\log_2 14} = 1+\frac{1}{\log_2(2\cdot 7)} = 1+\frac{1}{1+\log_2 7} \Rightarrow \log_2 7 = \frac{2-a}{a-1}$$

$$\log_{49} 16 = \log_{49} 2^4 = \frac{4}{\log_2 49} = \frac{4}{\log_2 7^2} = \frac{4}{2\log_2 7} = \frac{2}{\log_2 7} = \frac{2(a \quad 1)}{2 \quad a}$$

Solución del problema 8:



$$A_{Sombreada} = A_{Sector\,DOB} + A_{4\,ADO}$$

$$A_{Sombreada} = qr^2 + \frac{1}{2}r^2 sen(p \quad 2q)$$

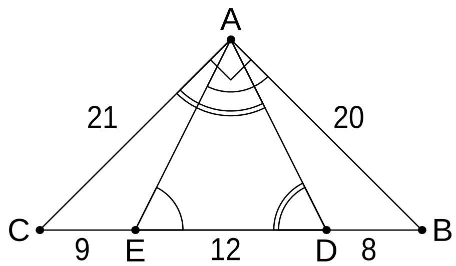
$$A_{Sombreada} = qr^2 + \frac{1}{2}r^2\left[sen(p)\cos(2q) + sen(2q)\cos(p)\right]$$

$$A_{Sombreada} = qr^2 + \frac{r^2}{2} sen(2q)$$

$$A_{Sombreada} = \frac{r^2}{2}\left[sen(2q) + 2q\right]$$

Solución del problema 9: Sean A, B, C los tres colores. El número de banderas tricolores con todos los colores distintos es $3! = 1 \quad 2 \quad 3 = 6$, luego para que existan dos colores iguales en la bandera, esto solo se puede dar cuando el color central es distinto, esto se puede dar de 6 formas, es decir las banderas del tipo: $, BAB, CAC, ABA, CBC, ACA, BCB$. Con lo cual el número de banderas tricolores es $6 + 6 = 12$

Solución del problema 10:



Sea $a = \backslash DAE$, $b = \backslash EAC$, $q = \backslash BAD$. El $4\,ABE$ es isósceles con $AB = BE$, por tanto $\backslash BAE = \backslash AEB = a + q$; de la misma forma el $4\,CAD$ es isósceles con $CA = CD$, por tanto $\backslash CAD = \backslash ADC = a + b$, con lo cual en el $4\,EDA$ tenemos $3a + b + q = 180$.

Por otra parte el $4\,ABC$ veamos que se cumple:

$$21^2 + 20^2 = 29^2$$

$$20^2 = 29^2 \quad 21^2$$

$$20^2 = (29 \quad 21)(29 + 21)$$

$$20^2 = (8)(50)$$

$$20^2 = (4^2)(5^2)$$

Es decir que el $4\,ABC$ en rectángulo, por tanto $\backslash BAC = a + b + q = 90$ y usando la igualdad $3a + b + q = 180 \quad) \; 2a + (a + b + q) = 180 \quad) \; 2a + 90 = 180 \quad) \; \backslash DAE = a = 45$

Solución del problema 11: Usando el Binomio de Newton tenemos:

$[x^6+(1+x^3)]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(x^6)^{10-k}(1+x^3)^k$ y además $(1+x^3)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1)^{k-i}(x^3)^i$

Ahora podemos escribir:

$$[x^6+(1+x^3)]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(x^6)^{10-k}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1)^{k-i}(x^3)^i\right]$$
$$[x^6+(1+x^3)]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{60-6k}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{3i}\right]$$
$$[x^6+(1+x^3)]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{k}\binom{10}{k}x^{60-6k}\left[\binom{k}{i}x^{3i}\right]$$
$$[x^6+(1+x^3)]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{k}\binom{10}{k}\binom{k}{i}x^{60-6k+3i}$$

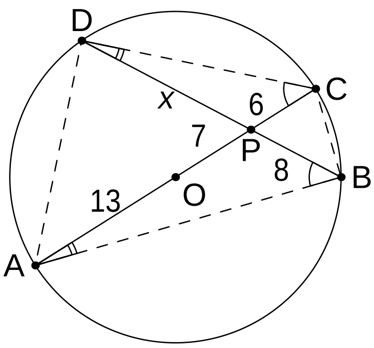
Recordando que $0\le k\le 10$ y además $0\le i\le k$ con $k,i\in\mathbb{N}$, solo nos queda resolver la ecuación en los enteros positivos:

$$60-6k+3i=9$$

que es equivalente a resolver: $2k-i=17$, y que se resuelve únicamente con los pares de naturales $(k,i):(10,3),(9,1)$

Con $(10,3)$ tenemos $\binom{10}{10}\binom{10}{3}x^9=120x^9$ y con $(9,1)$ tenemos $\binom{10}{9}\binom{9}{1}x^9=90x^9$, por lo tanto el coeficiente de x^9 es $120+90=210$

Solución del problema 12:



Sea DB, la cuerda buscada. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, por tanto $\angle BAC=\angle BDC$ y $\angle DBA=\angle DCA$, además $\angle DPC=\angle BPA$ por ser opuestos por el vértice. De lo anterior podemos decir que $\triangle CDP\sim\triangle BAP$, y podemos escribir:

$$\frac{CD}{BA}=\frac{DP}{AP}=\frac{CP}{BP}\Rightarrow\frac{CD}{BA}=\frac{x}{13+7}=\frac{6}{8}\Rightarrow x=15$$

Con lo cual $DB=x+8=15+8=23$

Solución del problema 13: Los números que arrollan a 2020 son números de cuatro dígitos, y tomando en cuenta los dígitos de izquierda a derecha, podemos ubicar $7\ \ 9\ \ 7\ \ 9=(7\ \ 9)^2=56^2$

Solución del problema 14: Usamos la propiedad: $\log_{b^m} A^n = \dfrac{n}{m}\log_b A$

$$\begin{aligned}
\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2x} &= \frac{\frac{1}{3}\log_2 4x}{\frac{1}{4}\log_2 8x}\\
\frac{2\log_2 x}{\log_2 2x} &= \frac{4\log_2 4x}{3\log_2 8x}\\
\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} &= \frac{2(2+\log_2 x)}{3(3+\log_2 x)}\\
\text{Sea } u &= \log_2 x\\
\frac{u}{1+u} &= \frac{2(2+u)}{3(3+u)}\\
3(u)(u+3) &= 2(u+1)(u+2)\\
u^2+3u-4 &= 0\\
(u+4)(u-1) &= 0
\end{aligned}$$

Si $u=-4 \Rightarrow \log_2 x=-4 \;,\; x=\dfrac{1}{16}$

Si $u=1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \;,\; x=2$

Luego el producto $x_1 \cdot x_2 = 2\cdot\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8}$

Solución del problema 15: Si usamos la identidad: $sen(2x)=2sen\,x\cos x$, tenemos:

$$(sen\,2019x)(\cos 2019x) = \frac{1}{2}(2sen\,2019x)(\cos 2019x) = \frac{1}{2}sen\,(2\cdot 2019x) = \frac{1}{2}sen\,(4038x)$$

Luego el mínimo valor de $sen\,(4038x)$ es -1, con lo cual el mínimo valor de $\dfrac{1}{2}sen\,(4038x)$ es $-\dfrac{1}{2}$

Solución del problema 16: El alfabeto sin la letra Ñ, consta de 26 letras, entonces se pueden formar 26×10^4 placas antiguas y se pueden formar $26^3\times 10^4$ placas nuevas. Luego $26^2(26\times 10^4) = 26^3\times 10^4$, por tanto aumenta en 26^2 veces el número de matrículas para vehículos.

Solución del problema 17: Sea $\angle CDB=\alpha$, luego $\angle CDB=\angle BDA=\alpha$, puesto que DB es bisectriz del triángulo ACD.

D es la interseccion con el eje x, con lo cual tiene coordenadas $(1,0)$, y A tiene coordenadas $(13,12\sqrt{3})$ por tanto $DC=12$ y $AC=12\sqrt{3}$

Con lo cual podemos escribir:

$$\tan 2\alpha = \frac{12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{BC}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto las coordenadas de B son $\left(13,\dfrac{12}{\sqrt{3}}\right)$, con lo que concluimos que $q=\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

Solución del problema 18:

$$\begin{aligned}
t_9 &= 2(t_7+t_8)\\
24 &= 2(8+t_8)\\
12 &= 8+t_8\\
t_8 &= 4
\end{aligned}$$

Luego

$$t_{10} = 2(t_8 + t_9) = 2(4 + 24) = 56$$
$$t_{11} = 2(t_9 + t_{10}) = 2(24 + 56) = 160$$

Solución del problema 19: El triángulo ABP, es isósceles con $PA = PB$. con lo cual la altura del triángulo ABP, trazada desde P, tiene como pie al punto medio de AB, y por tanto es igual al segmento BF.

Área $\triangle ABP = \dfrac{(AB)(BF)}{2} = \dfrac{(2)(\sqrt{2^2 + 2^2})}{2} = \sqrt{8}$

Solución del problema 20: En principio, las 100 cartas tienen el lado rojo arriba. Después del primer pase de Jorge, solo las 50 cartas impares tienen el lado rojo hacia arriba, ya que acaba de pasar todas las cartas pares de rojo a amarillo.
Durante el segundo pase de Jorge, él voltea todas las cartas cuyo número es divisible por 3. En este pase, Jorge girará cualquier carta imparable divisible por 3 de rojo a amarillo. Entre 1 y 100, hay 17 números impares que son divisibles por 3, es decir, 3, 9, 15, 21, ..., 93 y 99. También en este pase, Jorge girará cualquier tarjeta de número par divisible por 3 de amarillo a rojo. Entre 1 y 100, hay 16 números pares que son divisibles por 3, es decir, 6, 12, 18, 24, ..., 90 y 96.
Cuando Jorge termina, las cartas que tienen el lado rojo hacia arriba son las 50 cartas impares del primer pase, menos las 17 cartas impares divisibles por 3 desde el segundo pase, más las 16 cartas numeradas iguales divisibles por 3 , también desde la segunda pasada. Así, $50 - 17 + 16 = 49$ cartas tienen el lado rojo hacia arriba.

2.2 SEGUNDA FASE

2.2.1 NIVEL B

Solución del problema 1: $21 = 7 \quad 3$; $51 = 3 \quad 17$; $81 = 3 \quad 27$; $91 = 7 \quad 13$, los 5 restantes son números primos.

Solución del problema 2: El ángulo $\backslash ACF = 45$, por tanto $z = 180 \quad y \quad (x + 45\ ) = 180 \quad 32 \quad (23 + 45\ ) = 80$

Solución del problema 3: La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180 ; si uno de sus ángulos es 72 , entonces la suma de los dos angulos restantes es 108

Solución del problema 4: En la división el número buscado es el dividendo, el divisor es 10, el cociente es 99 y el residuo es 9. Ahora debemos recordar la relación que existe entre estos cuatro elementos:

$$\begin{aligned} Dividendo &= Divisor \quad Cociente + Residuo \\ Dividendo &= 99 \quad 10 + 9 \\ Dividendo &= 999 \end{aligned}$$

Por tanto el número buscado es 999

Solución del problema 5: Entre 60 y 90 existen 7 números primos: 61, 67, 71, 73, 79, 83 y 89.
Por tanto su suma es $61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 = 523$

Solución del problema 6: 34

Solución del problema 7: Imaginemos que la OMEC tiene 20 miembros (se puede usar otra cantidad de miembros), por tanto el 50% es la mitad, es decir, votaron 10 personas, con lo cual 6 personas votaron a favor de realizar una fiesta con los ganadores del año 2019. Por lo tanto estas 6 personas representan $\frac{6 \quad 100\%}{20} = 30\%$

Solución del problema 8: Un número con más de dos cifras es múltiplo de 4, si y solo si, sus dos últimas cifras es un múltiplo de 4, luego las dos últimas cifras del código corresponden al número 56, puesto que cada dígito después del primero debe ser uno más que el dígito anterior, y fácilmente se puede deducir que el código elegido es 3456.

Solución del problema 9: 42

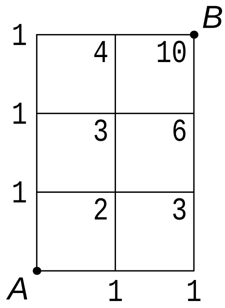
Solución del problema 10: 4

Solución del problema 11:

$$\begin{aligned} & \frac{12}{11} + \frac{23}{22} + \frac{45}{44} + \frac{89}{88} \\ &= \frac{1}{11} + \frac{11}{11} \quad + \quad \frac{1}{22} + \frac{22}{22} \quad + \quad \frac{1}{44} + \frac{44}{44} \quad + \quad \frac{1}{88} + \frac{88}{88} \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{44} + \frac{1}{88} \quad + \quad \frac{11}{11} + \frac{22}{22} + \frac{44}{44} + \frac{88}{88} \\ &= \frac{15}{88} + 4 \\ &= \frac{367}{88} \end{aligned}$$

Solución del problema 12: 77

Solución del problema 13: Solo existen 10 caminos desde A hasta B y se marcan el número de formas de llegar a cada vértice en la figura.



Solución del problema 14: 47

Solución del problema 15: 7

2.2.2 NIVEL A

Solución del problema 1: Como el campo es rectangular, su perímetro es $5 + 10 + 5 + 10 = 30\,m$. Como Jorge camina alrededor del perímetro 5 veces, entonces camina $5 \quad 30 = 150\,m$

Solución del problema 2: $5 \quad 4 = 20$ termina en cero, por tanto cualquier número al multiplicarse por 20 terminará en cero.

Solución del problema 3: Se busca un número tal que:

$$\begin{array}{rcl} 12 \quad 9 & = & 9 \quad 6 \quad 4 \\ 2 \quad 6 \quad 9 & = & 9 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \quad 6 \quad 9 \quad \boxed{2} & = & 9 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Ese número es 2.

También se busca otro número tal que :

$$\begin{array}{rcl} 1 \quad 6 & = & 9 \quad 6 \quad 4 \\ 1 \quad 6 & = & 1 \quad 36 \quad 6 \\ 1 \quad 6 \quad \boxed{36} & = & 1 \quad 36 \quad 6 \end{array}$$

Ese número es 36. Por lo tanto $2 + 36 = 38$

Solución del problema 4: $\dfrac{2018 \quad 0,2019}{2,018 \quad 20,19} = \dfrac{2018 \quad 0,2019 \quad 100000}{2,018 \quad 20,19 \quad 100000} = \dfrac{2018 \quad 2019 \quad 10}{2018 \quad 2019} = 10$

Solución del problema 5: Si la caja tiene 18 caramelos de chocolate, y eso representa la mitad de la caja, entonces la caja contiene en total $18 + 18 = 36$ caramelos. De los cuales tenemos:

La mitad de chocolate: $36 \quad \dfrac{1}{2} = 18$ caramelos de chocolate.

La cuarta parte de menta: $36 \quad \dfrac{1}{4} = 9$ caramelos de menta.

La sexta parte de frutilla: $36 \quad \dfrac{1}{6} = 6$ caramelos de frutilla.

El resto de coco: $36 \quad 18 \quad 9 \quad 6 = 3$ caramelos de coco.

Solución del problema 6: Primero veamos el caso en que lo multiplico por sí mismo y por 5 y después le sumo 7:

Si pensé en el 1 tenemos $1 \quad 1 \quad 5 + 7 = 12$
Si pensé en el 2 tenemos $2 \quad 2 \quad 5 + 7 = 27$
Si pensé en el 3 tenemos $3 \quad 3 \quad 5 + 7 = 52$
Si pensé en el 4 tenemos $4 \quad 4 \quad 5 + 7 = 85$
Si pensé en el 5 tenemos $5 \quad 5 \quad 5 + 7 = 132$

En este caso solo podrían ser los números $1, 2, 3, 4$ puesto que son los únicos que entregan un valor menor que 100.

Ahora veamos el caso en que lo multiplico por sí mismo y por 7 y después le sumo 5:

Si pensé en el 1 tenemos $1 \quad 1 \quad 7 + 5 = 12$
Si pensé en el 2 tenemos $2 \quad 2 \quad 7 + 5 = 33$

Si pensé en el 3 tenemos 3   3   7 + 5 = 68
Si pensé en el 4 tenemos 4   4   7 + 5 = 117
Si pensé en el 5 tenemos 5   5   7 + 5 = 180

En este caso solo podrían ser los números mayores o iguales que 4, puesto que entregan un valor mayor que 100.

Ya que necesitamos un mismo número que cumpla las dos condiciones a la vez, por tanto ese número es el 4.

Solución del problema 7: 97

Solución del problema 8: Puede armar los grupos de la siguiente forma:

1 Invitar a Ani y Bibi
2 Invitar a Ani y Ceci
3 Invitar a Ani y Dani
4 Invitar a Ani y Eli
5 Invitar a Bibi y Ceci
6 Invitar a Bibi y Dani
7 Invitar a Bibi y Eli
8 Invitar a Ceci y Dani
9 Invitar a Ceci y Eli
10 Invitar a Dani y Eli

Por lo tanto Andrea puede invitar de 10 formas distintas a sus primas.

Solución del problema 9: En la fracción que se va a encontrar, el numerador debe ser menor al denominador, por ejemplo: $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$, satisfacen la primera condición del problema, pero solo la última satisface la segunda condición del problema. Esto ocurre con cualquier tipo de fracciones que podamos imaginar, es decir la situación ideal, seria tener un denominador que sea apenas una unidad mayor que el numerador. Siguiendo con nuestro ejemplo, podemos conseguir infinitas fracciones del tipo: $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \ldots$ menores que 1, pero es evidente que mientras mayores son el denominador y numerador, más cercana a 1 es la fracción; por tanto, $\frac{10}{11}$ está más cerca de 1 que $\frac{6}{7}$, y con esto buscamos el mayor denominador posible, que se logra con $b = 8$ e $y = 9$, es decir:

$$\frac{a}{8} + \frac{x}{9} < 1$$

También sabemos que $\frac{a}{8} + \frac{x}{9} = \frac{(9 \quad a) + (8 \quad x)}{8 \quad 9} = \frac{9a + 8x}{72}$

Ahora intentaremos que el numerador $9a + 8x$ sea igual a 71; esto se consigue con $a = 7$ y $x = 1$. Luego, tenemos que $\frac{71}{72}$ es la fracción buscada y, finalmente, $71 + 72 = 143$, es la suma pedida.

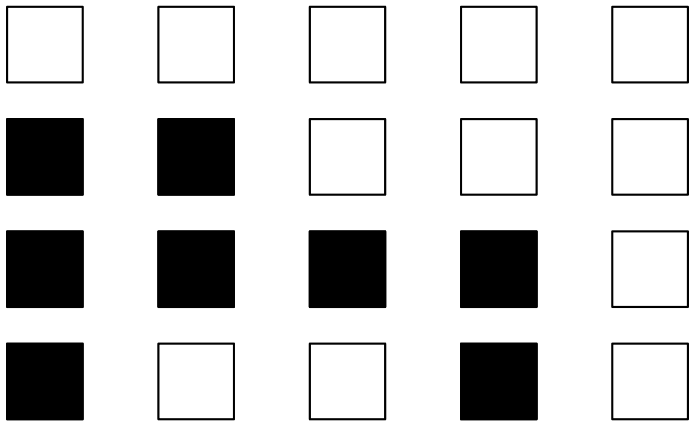
Solución del problema 10: Existen 25 cuadrados de 1   1
Existen 16 cuadrados de 2   2
Existen 9 cuadrados de 3   3
Existen 4 cuadrados de 4   4
Existe 1 cuadrado de 5   5

Solución del problema 11: Entre 60 y 90 existen 7 números primos: 61, 67, 71, 73, 79, 83 y 89.
Por tanto su suma es $61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 = 523$

Solución del problema 12: diez monedas de 25 centavos = $10 \quad 0,25 = 2,5$ dólares
diez monedas de 5 centavos = $10 \quad 0,05 = 0,5$ dólares
diez monedas de 1 centavo = $10 \quad 0,01 = 0,1$ dólares

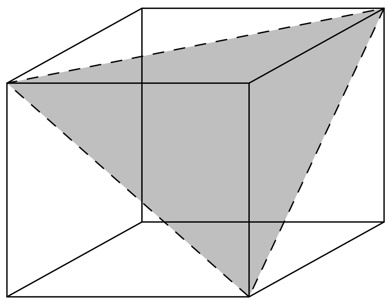
Luego $2,5 + 0,5 + 0,1 = 3,1$ dólares, que equivalen 3 dólares con 10 centavos, por lo tanto debo recibir 31 monedas de 10 centavos.

Solución del problema 13: Se necesitan como mínimo 3 movimientos:



Solución del problema 14: Existen $2 \quad 3 \quad 4 = 24$ tipos diferentes de camisetas en la tienda de la OMEC.

Solución del problema 15: Solo basta hacer un trazo como el que se muestra en la figura:



puesto que las tres diagonales tienen igual longitud, forman un triángulo equilátero, con lo cual cada uno de sus ángulos miden 60

2.2.3 NIVEL 1

Solución del problema 1: 2 y 5 se encuentran entre los números primos menores que 100, y su producto es $2 \quad 5 = 10$, luego cualquier número multiplicado por 10 debe tener como dígito en el lugar de las unidades el 0.

Solución del problema 2: Para calcular el promedio de cinco números, sumamos los números y dividimos esa suma entre 5.
En ese caso, ya que el promedio es 11, la suma de los cinco números es $11 \quad 5 = 55$.
Puesto que los cinco números deben ser diferentes, tomaremos los cuatro enteros positivos más pequeños, con lo cual la suma es: $1 + 2 + 3 + 4 + 45 = 55$, por lo tanto el número mayor de los cinco es 45.

Solución del problema 3: Sea l el valor del lado, luego el perímetro es $2019l$, entonces

$$l = \frac{2019^2}{2019} = 2019$$

Solución del problema 4: Personas que no bailan: x
Personas que bailan: $\frac{x}{4}$
Por tanto el 100% de las personas en la fiesta es: $x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$. Usando una regla de tres simple tenemos: $100\% \quad n \quad \frac{4}{5n} = 80\%$

Solución del problema 5: Por simple inspección se puede comprobar que 5 y $\frac{1}{5}$ satisfacen la ecuación, por tanto su producto es $5 \quad \frac{1}{5} = 1$

Solución del problema 6: Danielle obtuvo x caras y $50 \quad x$ sellos. Luego su ganancia es

$$7x \quad 4(50 \quad x) = 11x \quad 200 \;=)\; 11x \quad 200 = 119 \;=)\; x = 29$$

Solución del problema 7: El total de puntos en la tabla es $4 \quad 18 = 72$, y puesto que cada columna debe tener la misma cantidad de puntos, por lo tanto cada columna debe tener $\frac{72}{6} = 12$ puntos.

Solución del problema 8: Eso quiere decir que el triángulo tiene exactamente dos lados de igual longitud. Imaginemos que esos lados de igual longitud miden el menor número natural, es decir 1, entonces el tercer lado no podría ser natural, luego imaginemos que los dos lados iguales miden el siguiente natural, es decir 2, por tanto el tercer lado debe medir 1. Con lo cual las longitudes del triángulo son $1, 2, 2$, que cumplen la desigualdad triangular y su perímetro es 5.

Solución del problema 9: Todos los números de tres cifras distintas que se puede formar usando los dígitos $1, 3, 6$ son:

$$136 + 163 + 361 + 316 + 613 + 631$$

Notemos que al sumar las unidades, decenas y centenas de estos números, siempre se encuentra la suma $1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 6 = 2(1 + 3 + 6) = 20$, por tanto la suma es 2220

Solución del problema 10: Se sabe que los ángulos de un triángulo suman 180 y \ $ACB = 45$, luego

$$x + 45 \; + y + z = 180 \qquad =) \qquad x = 24$$

Solución del problema 11: La moda es el número que ocurre con más frecuencia en un conjunto de números, con lo cual, al menos dos de los tres números deben ser iguales a 9, de lo contrario habría tres números diferentes y, por lo tanto, tres modas.

Si los tres números eran iguales a 9, entonces el promedio de los tres números no podría ser 7.

Si el tercer número es x, entonces los tres números son x, 9 y 9.

Como el promedio de los tres números es 7, podemos escribir: $\dfrac{x+9+9}{3} = 7 \Rightarrow x + 18 = 21$, entonces $x = 3$. Por tanto el más pequeño de los tres números es 3.

Solución del problema 12: Expresemos todos los números naturales de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} 1 = 1 & \qquad & 9 = 3 \times 3 \\ 2 = 2 & & 10 = 2 \times 5 \\ 3 = 3 & & 11 = 11 \\ 4 = 2 \times 2 & & 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ 5 = 5 & & 13 = 13 \\ 6 = 2 \times 3 & & 14 = 2 \times 7 \\ 7 = 7 & & 15 = 3 \times 5 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 & & 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \end{array}$$

Eso quiere decir que $n! = 2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 15 \times 16 = 16!$, con lo cual $n = 16$

Solución del problema 13: Existen $\dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ fichas con cantidades diferentes de puntos en cada lado y 8 con cantidades iguales, por tanto el dominó de la $OMEC$ tiene $28 + 8 = 36$ fichas diferentes.

Solución del problema 14: Un cubo tiene 6 caras de igual superficie, por tanto cada cara tiene $\dfrac{24}{6} = 4\,cm^2$, eso quiere decir que cada arista del cubo tiene $2\,cm$, por lo tanto su volumen es $2\,cm \times 2\,cm \times 2\,cm = 8\,cm^3$

Solución del problema 15: La suma de los ángulos interiores cada triángulo es 180°, con lo cual:

$$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U + \angle QOP + \angle UOT + \angle SOR = 3(180^\circ)$$

Además $\angle SOR = \angle UOP$ al ser opuestos por el vértice, entonces:

$$\angle QOP + \angle UOT + \angle SOR = \angle QOP + \angle UOT + \angle UOP = 180^\circ$$

Finalmente podemos escribir:

$$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U + 180^\circ = 3(180^\circ)$$

$$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U = 3(180^\circ) - 180^\circ = 360^\circ$$

2.2.4 NIVEL 2

Solución del problema 1: Reescribiendo la expresión:

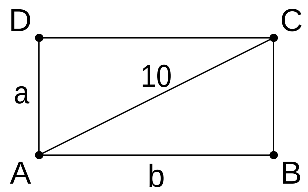
$123\,456\,789 \quad 999\,999\,999 = 123\,456\,789 \quad (10^9 \quad 1) = 123\,456\,789 \quad 10^9 \quad 123\,456\,789 = 123\,456\,788\,876\,543\,211$

Solución del problema 2:

$$\begin{aligned} x(y+1) \quad y(x+1) &= 7 \\ xy + x \quad xy \quad y &= 7 \\ x \quad y &= 7 \end{aligned}$$

Luego: $x(y+2) \quad y(x+2) = xy + 2x \quad xy \quad 2y = 2x \quad 2y = 2(x \quad y) = 2(7) = 14$

Solución del problema 3:



Realizando un gráfico que nos ayude a recrear la situación, vemos que debe cumplirse en Teorema de Pitágoras, tal que $a^2 + b^2 = 10^2$, con lo cual debemos buscar enteros positivos a, b tal que se cumpla la igualdad, y eso solo ocurre con $a = 6$ y $b = 8$, o viceversa, puesto que $6^2 + 8^2 = 10^2$. Luego el perímetro de rectángulo es $2(6) + 2(8) = 28$.

Solución del problema 4: Existen $\frac{8 \quad 7}{2} = 28$ fichas con cantidades diferentes de puntos en cada lado y 8 con cantidades iguales, con lo cual el dominó de la $OMEC$ tiene $28 + 8 = 36$ fichas diferentes.

Como la suma de un par y un impar es impar, y existen 4 cantidades impares de puntos (1, 3, 5, 7) y 4 cantidades pares de puntos (0, 2, 4, 6), entonces existen $4 \quad 4 = 16$ fichas que no son importantes, por lo tanto existen $36 \quad 16 = 20$ fichas importantes.

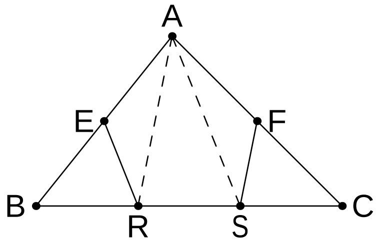
Solución del problema 5:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10 \quad 11}{2} = 55 \\ S_2 &= 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 2(55) \\ S_3 &= 3(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 3(55) \\ &\vdots \\ S_{10} &= 10(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 10(55) \end{aligned}$$

Con lo cual podemos escribir:
$S_1 + S_2 + \quad + S_9 + S_{10} = 55 + 2(55) + \quad 10(55) = 55(1 + 2 + \quad + 9 + 10) = 55(55) = 3025$

Solución del problema 6: El triángulo ABE es isósceles con $\backslash BAE = 54$, con lo cual $\backslash AEB = \backslash EBA = 63$, también el triángulo ABC es isósceles con $\backslash BAC = 18$, con lo cual $\backslash ACB = \backslash CBA = 81$, por lo tanto $b = \backslash CBE = 18$

Solución del problema 7:



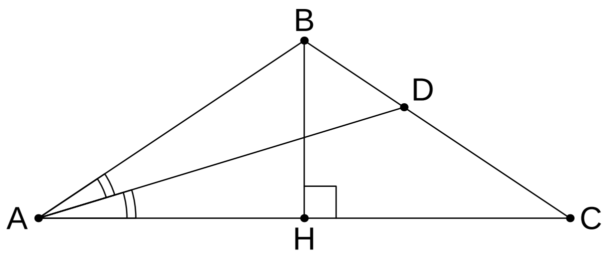
Para empezar denotaremos a partir de este momento (ABC), como el área del triángulo ABC

En $\triangle ABR$, notamos que RE es mediana con lo cual $(ARE) = (BER) = S_1$
En $\triangle ACS$, notamos que SF es mediana con lo cual $(AFS) = (FCS) = S_2$
En $\triangle BAS$, notamos que AR es mediana con lo cual $(BAR) = (RAS) = S_3$, por lo tanto $S_3 = 2S_1$
En $\triangle ACR$, notamos que AS es mediana con lo cual $(ACS) = (RAS) = S_3$, por lo tanto $S_3 = 2S_2$
De lo anterior podemos escribir: $S_1 = S_2$
Luego $(ABC) = [(ARE) + (BER)] + (RAS) + [(AFS) + (FCS)] = 2S_1 + S_3 + 2S_2 = 2S_1 + 2S_1 + 2S_1 = 6S_1 = 252$, es decir $S_1 = 42$
Finalmente $(AERSF) = (ARE) + (RAS) + (AFS) = S_1 + S_3 + S_2 = S_1 + 2S_1 + S_1 = 4S_1 = 168$

Solución del problema 8: $px + 2y = 7 \Rightarrow \frac{5}{7}(px + 2y) = \frac{5}{7} \cdot 7 \Rightarrow \frac{5p}{7}x + \frac{10}{7}y = 5$

Con lo cual $q = \frac{10}{7}$, del mismo modo $\frac{5p}{7} = 3 \Rightarrow p = \frac{21}{5}$. Por tanto $pq = \frac{21}{5} \cdot \frac{10}{7} = 6$

Solución del problema 9:



Sea D la intersección entre la bisectriz de $\angle A$ y el lado BC y sea H el pie de la altura del $\triangle ABC$ desde B, es decir que los ángulos que se forman entre la bisectriz de $\angle A$ con el lado BCson $\angle BDA$ y $\angle ADC$.

Puesto que $\triangle ABC$ es isósceles con $BA = BC$ se tiene que $\angle CAB = \angle BCA = 18^\circ$ y además BH es altura y bisectriz, por tanto $\angle HBC = \angle ABH = 72^\circ$.

Por otra parte tenemos que AD es bisectriz, entonces $\angle CAD = \angle DAB = 9^\circ$. Con lo cual en $\triangle DAC$ tenemos que $\angle ADC = 180^\circ - 18^\circ - 9^\circ = 153^\circ$ y por tanto $\angle BDA = 180^\circ - 153^\circ = 27^\circ$ que es el ángulo agudo buscado.

Solución del problema 10: Imaginemos que tenemos solo 3 dígitos distintos a, b, c, por tanto podemos formar 6 números distintos de 3 cifras, y al ubicar uno bajo otro para sumarlos, nos damos cuenta que cada columna tiene como suma $2(a + b + c)$ por tanto la suma de los 6 números es $200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c) = 222(a + b + c)$.
Ahora si tenemos 4 dígitos x, y, z, w, puedo formar $\binom{4}{3} = 4$ grupos de 3 dígitos diferentes, y cada uno de estos grupos tiene suma $222(a + b + c)$ donde a, b, c tomaran los valores de x, y, z, w en algún orden, es decir:

Para el grupo x, y, z la suma es $222(x + y + z)$
Para el grupo x, y, w la suma es $222(x + y + w)$
Para el grupo y, w, z la suma es $222(y + w + z)$
Para el grupo x, w, z la suma es $222(x + w + z)$

Por tanto la suma de los 4 grupos es $222(3x+3y+3z+3w) = 666(x+y+z+w) = 666(1+2+3+4) = 6660$.

Solución del problema 11: Si $ACDE$ es un rectángulo, entonces $AE = CD$, además si $ABCE$ es un paralelogramo, entonces $AE = BC$, con lo cual $AE \perp BC = CD$. Luego AC es altura del los triángulos ABC, ECD, EAC y por tanto tienen igual área de 11 cm^2, por lo tanto el cuadrilátero $ABDE$ tiene área 33 cm^2

Solución del problema 12: Sea $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, entonces $a+b=1$ y $ab=-1$.
Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= 1^2\\
a^2+2ab+b^2 &= 1\\
a^2+2(-1)+b^2 &= 1\\
a^2+b^2 &= 3\\
(a^2+b^2)^2 &= 3^2\\
a^4+2a^2b^2+b^4 &= 9\\
a^4+2(1)+b^4 &= 9\\
a^4+b^4 &= 7\\
(a^4+b^4)^2 &= 7^2\\
a^8+2a^4b^4+b^8 &= 49\\
a^8+2(1)+b^8 &= 49\\
a^8+b^8 &= 47
\end{aligned}$$

Por tanto $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 = 47$

Solución del problema 13: Si $x^2-5x+5=1 \Rightarrow x^2-5x+4=0$, luego factorizando o usando las relaciones de Vieta-Cardano sabemos que la suma de las soluciones de esta ecuación es 5.

Si $x^2+4x-60=0$, luego factorizando o usando las relaciones de Vieta-Cardano sabemos que la suma de las soluciones de esta ecuación es -4. Además estamos seguros que con ninguna de estas solcuiones se da el caso de la indeterminación 0^0. puesto que la igualdad entre la base y el exponente solo se da con $x=\frac{65}{9}$, que no es una raíz.

Si $x^2-5x+5=-1$ y $x^2+4x-60$ es par, con lo cual $x^2-5x+5=-1 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$. Cuando $x=2 \Rightarrow x^2+4x-60$ es par, es decir $x=2$ es una solución, pero cuando $x=3 \Rightarrow x^2+4x-60$ es impar, es decir $x=3$ no es una solución.

Por lo tanto la suma de los valores de x que satisfacen la ecuación es $5-4+2=3$

Solución del problema 14: $4\star 1=(4)(1)-4+1=1$
$2\star 2=(2)(2)-2+2=4$
Luego $(4\star 1)^{2\star 2}=1^4=1$

Solución del problema 15: Existen 9 números capicúas de un dígito
Existen 9 números capicúas de dos dígitos.
Existen $10\times 9=90$ números capicúas de tres dígitos.
Existen 10 número capicúas de cuatro dígitos que comienza con 1.
Existe 1 número capicúas de cuatro dígitos que comienza con 2, y menor a 2019 que es el 2002.

Finalmente existen $9 + 9 + 90 + 10 + 1 = 119$ números capicúas entre 1 y 2019.

2.2.5 NIVEL 3

Solución del problema 1: Sea $a = 2019^{\log_{2020} 2021}$, luego:

$$\begin{aligned}
\log_{2020} a &= \log_{2020} 2019^{\log_{2020} 2021} \\
\log_{2020} a &= (\log_{2020} 2021)(\log_{2020} 2019) \\
\frac{\log_{2020} a}{\log_{2020} 2021} &= \log_{2020} 2019 \\
\log_{2021} a &= \log_{2020} 2019 \\
a &= 2021^{\log_{2020} 2019}
\end{aligned}$$

Ahora podemos escribir:

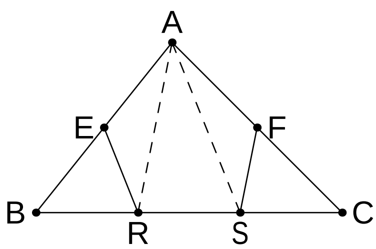
$$\begin{aligned}
2019^{\log_{2020} 2021} &= 2021^{\log_{2020} 2019} \\
2019^{\log_{2020} 2021} \quad 2021^{\log_{2020} 2019} &= 0
\end{aligned}$$

Nota: De manera general se cumple $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$ con $y \in \mathbb{R}^+, y \neq 1$

Solución del problema 2:

$$\begin{aligned}
&= \; a+\frac{1}{a}^{\,2} + b+\frac{1}{b}^{\,2} + ab+\frac{1}{ab}^{\,2} \quad ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \quad ab+\frac{1}{ab} \\
&= \; a+\frac{1}{a}^{\,2} + b+\frac{1}{b}^{\,2} + ab+\frac{1}{ab}^{\,2} \quad ab+\frac{1}{ab} + \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \quad ab+\frac{1}{ab} \\
&= \; a+\frac{1}{a}^{\,2} + b+\frac{1}{b}^{\,2} + ab+\frac{1}{ab}^{\,2} \quad ab+\frac{1}{ab}^{\,2} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \quad ab+\frac{1}{ab} \\
&= \; a+\frac{1}{a}^{\,2} + b+\frac{1}{b}^{\,2} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \quad ab+\frac{1}{ab} \\
&= \; a^2+2+\frac{1}{a^2} + b^2+2+\frac{1}{b^2} \quad a^2+\frac{1}{b^2}+b^2+\frac{1}{a^2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Solución del problema 3:



Para empezar denotaremos a partir de este momento (ABC), como el área del triángulo ABC

En $\triangle ABR$, notamos que RE es mediana con lo cual $(ARE) = (BER) = S_1$
En $\triangle ACS$, notamos que SF es mediana con lo cual $(AFS) = (FCS) = S_2$
En $\triangle BAS$, notamos que AR es mediana con lo cual $(BAR) = (RAS) = S_3$, por lo tanto $S_3 = 2S_1$
En $\triangle ACR$, notamos que AS es mediana con lo cual $(ACS) = (RAS) = S_3$, por lo tanto $S_3 = 2S_2$
De lo anterior podemos escribir: $S_1 = S_2$
Luego $(ABC) = [(ARE) + (BER)] + (RAS) + [(AFS) + (FCS)] = 2S_1 + S_3 + 2S_2 = 2S_1 + 2S_1 + 2S_1 = 6S_1 = 252$, es decir $S_1 = 42$
Finalmente $(AERSF) = (ARE) + (RAS) + (AFS) = S_1 + S_3 + S_2 = S_1 + 2S_1 + S_1 = 4S_1 = 168$

Solución del problema 4: Un subconjunto es superpar, si y solo si, no contiene dos números impares. Así, un subconjunto superpar contiene como máximo un impar y, por tanto, $10 + 1 = 11$ números.

Solución del problema 5:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= 2^2\\ x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) &= 4\\ 2+2(xy+yz+xz) &= 4\\ xy+yz+xz &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)\\ 2-3xyz &= 2(2-1)\\ xyz &= 0\end{aligned}$$

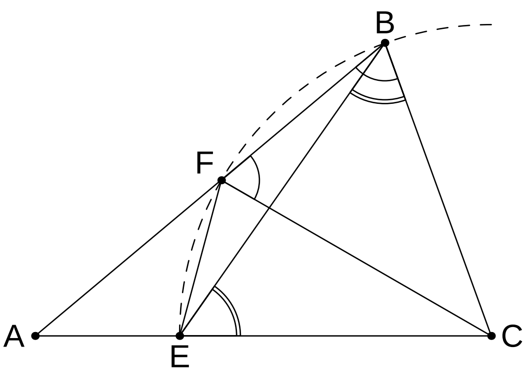
Eso quiere decir que una de las variables tiene el valor de cero, luego sin perdida de generalidad asumimos $z=0$, y de la ecuación $xy+yz+xz=1 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$

Usando $x+y+z=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}+0=2 \Rightarrow x^2+1=2x \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \wedge y=1$

Con lo cual obtenemos $x^4+y^4+z^4=1^4+1^4+0^4=2$

Nota: Observe que la terna $(x,y,z)=(1,1,0)$ no es la única solución del sistema de ecuaciones, también lo son $(1,0,1);(0,1,1)$ y en cualquiera de esos casos $x^4+y^4+z^4=2$

Solución del problema 6:



$\angle C = \angle ACF + \angle FCB \Rightarrow 70^\circ = 30^\circ + \angle FCB \Rightarrow \angle FCB = 40^\circ$
En $\triangle FCB: \angle FCB + \angle CBF + \angle BFC = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + 70^\circ + \angle BFC = 180^\circ \Rightarrow \angle BFC = 70^\circ$
Luego $\triangle FCB$ es isósceles con $BC = CF$

$\angle B = \angle CBE + \angle ABE \Rightarrow 70^\circ = 30^\circ + \angle FCB \Rightarrow \angle CBE = 55^\circ$
En $\triangle ECB: \angle ECB + \angle CBE + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + 55^\circ + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow \angle BEC = 55^\circ$
Luego $\triangle ECB$ es isósceles con $BC = CE$

Eso quiere decir que $BC = CF = CE$, y por tanto existe una circunferencia que tiene centro en C y pasa por los puntos B, F, E, con lo cual $\angle FEB = \frac{\angle FCB}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

Luego $\angle AEF + \angle FEB + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow \angle AEF + 20^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle AEF = 105^\circ$

Solución del problema 7: Probemos con algunos casos:

Si $n=2$ tenemos:
$(2^2-1)=(2-1)(2+1)=1\cdot 3$ no es cuadrado perfecto.

Si $n=3$ tenemos:

$(2^2-1)(3^2-1) = 1\cdot 3\cdot (3-1)\cdot (3+1) = 1\cdot 3\cdot 2\cdot 4 = 2^3\cdot 3$ no es cuadrado perfecto.

Si $n = 4$ tenemos:
$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1) = 2^3\cdot 3\cdot (4-1)\cdot (4+1) = 2^3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$ no es cuadrado perfecto.

Si $n = 5$ tenemos:
$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot (5-1)\cdot (5+1) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 4\cdot 6 = 2^6\cdot 3^3\cdot 5$ no es un cuadrado perfecto.

Si $n = 6$ tenemos:
$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1) = 2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot (6-1)\cdot (6+1) = 2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 = 2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$ no es un cuadrado perfecto.

Si $n = 7$ tenemos:
$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)(7^2-1) = 2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot (7-1)\cdot (7+1) = 2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 6\cdot 8 = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$ no es un cuadrado perfecto.

Si $n = 8$ tenemos:
$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)(7^2-1)(8^2-1) = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot (8-1)\cdot (8+1) = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 7\cdot 9 = 2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^2$ sí es un cuadrado perfecto.

Luego el menor entero positivo es $n = 8$

Solución del problema 8: Cada cantidad de puntos aparece exactamente 9 veces. Así la suma de todas las fichas es $9(1+2+\cdots+7) = 252$. La suma de los puntos e todas las fichas no importantes es $4(1+2+\cdots+7) = 112$, pues cada cantidad de puntos aparece exactamente 4 veces en fichas que no son importantes. Por lo tanto la suma de los puntos de todas las fichas importantes en el dominó de la *OMEC* es $252 - 112 = 140$

Solución del problema 9: Recordemos que la función $sen(x)$ es impar, y por lo tanto se cumple $sen(x) = -sen(-x)$

$$\begin{aligned}
f(-2019) &= 2019\\
a(-2019)^5 + b(-2019)^3 + c\,sen(-2019) - 1 &= 2019\\
-a(2019)^5 - b(2019)^3 - c\,sen(2019) &= 2020\\
a(2019)^5 + b(2019)^3 + c\,sen(2019) &= -2020\\
a(2019)^5 + b(2019)^3 + c\,sen(2019) - 1 &= -2021\\
f(2019) &= -2021\\
\frac{f(2019)}{2021} &= \frac{-2021}{2021}\\
\left(\frac{f(2019)}{2021}\right)^{2020} &= (-1)^{2020}\\
\left(\frac{f(2019)}{2021}\right)^{2020} &= 1
\end{aligned}$$

Solución del problema 10:

$$\begin{aligned}
\sec x - \tan x &= 2\\
(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x) &= 2(\sec x + \tan x)\\
\sec^2 x - \tan^2 x &= 2(\sec x + \tan x)\\
1 &= 2(\sec x + \tan x)\\
\sec x + \tan x &= \frac{1}{2}\\
\frac{2019}{2} + \sec x + \tan x &= \frac{2019}{2} + \frac{1}{2}\\
\frac{2019}{2} + \sec x + \tan x &= 1010
\end{aligned}$$

Solución del problema 11:

$$\begin{aligned}
(\overline{xyz})_7 &= (\overline{zyx})_9\\
49x + 7y + z &= 81z + 9y + x\\
48x &= 80z + 2y\\
24x &= 40z + y\\
24x - 40z &= y\\
8(3x - 5z) &= y
\end{aligned}$$

Luego esta última ecuación nos dice que y es múltiplo de 8, es decir solo puede ser 0 u 8 , puesto que y solo puede ser un número de una cifra, pero $y \neq 8$ puesto que en base 7 no tiene sentido, por tanto $y = 0$, con lo cual $3x - 5y = 0 \Rightarrow 3x = 5z \Rightarrow x = 5, z = 3$, por lo tanto el número es $7^2(5) + 7^1(0) + 7^0(3) = 248$

Solución del problema 12: Si a, b, c son los lados de un triángulo entonces debe cumplir:

$$\begin{aligned}
a + b &> c\\
a + b + c &> c + c\\
25 &> 2c\\
2c &< 25\\
c &< \frac{25}{2}\\
c &\leq 12
\end{aligned}$$

Y puesto que $c \in \mathbb{N}$ entonces $1 \leq c \leq 12$, con lo cual $13 \leq a + b \leq 24$
Ahora necesitamos dos enteros tal que su producto sea 24 y su suma esté entre 13 y 24, para lo cual tenemos las siguientes posibilidades:

$a = 1, b = 24 \Rightarrow c = 0$ lo cual no es admisible.
$a = 2, b = 12 \Rightarrow c = 11$
$a = 3, b = 8 \Rightarrow a + b = 11$ lo cual no es admisible.
$a = 4, b = 6 \Rightarrow a + b = 10$ lo cual no es admisible.

Por lo tanto las medidas de los lados del triángulo son $2, 11, 12$ las cuales cumplen la desigualdad triangular, con lo que podemos concluir que la longitud de su lado más largo es 12.

Solución del problema 13: Tenemos $\angle ALK = 180 - \angle KLM - \angle BLM = 180 - 90 - \angle BLM = 90 - \angle BLM = \angle LMB$, ambos ángulos $\angle KAL$ y $\angle LBM$ son rectos, de modo que $\triangle KAL = \triangle LBM$. Por lo tanto, siendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ y $BM = AL = 4 - x$. Luego el área del trapecio $AKMB = \dfrac{(AK + BM)(AB)}{2} = \dfrac{[x + (4 - x)]4}{2} = 8$, consecuentemente, el área del cuadrilátero $CDKM$ es $4^2 - 8 = 8$

Solución del problema 14: Existen $\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{2} = 10$ maneras de escoger los libros que serán guardados donde estaban antes.
Los otros tres libros, que llamaremos ABC en el orden que estaban antes, solo pueden ser guardados en el orden BCA y CAB. Así existen $10 \quad 2 = 20$ posibilidades para que Andrea guarde sus libros de Química.

Solución del problema 15: Este es un ejemplo de una serie telescópica:

$$\begin{aligned}
t_2 \quad t_1 &= 7\\
t_3 \quad t_2 &= 9\\
t_4 \quad t_3 &= 11\\
&\vdots\\
t_9 \quad t_8 &= 21\\
t_{10} \quad t_9 &= 23
\end{aligned}$$

Sumando las igualdades:

$$\begin{aligned}
t_2 \quad t_1 + t_3 \quad t_2 + t_4 \quad t_3 + \qquad t_9 \quad t_8 + t_{10} \quad t_9 &= 7 + 9 + 11 + \qquad 21 + 23\\
t_{10} \quad t_1 &= \frac{9(7+23)}{2}\\
t_{10} \quad 5 &= 135\\
t_{10} &= 140
\end{aligned}$$

2.3 TERCERA FASE

2.3.1 NIVEL B

Solución del problema 1: Hallando los factores primos de 2520 tenemos:

$$2520 = 2^3 \quad 3^2 \quad 5 \quad 7$$

por lo tanto para que sea un cuadrado perfecto debemos multiplicarlos por $2 \quad 5 \quad 7 = 70$

Solución del problema 2: Se puede formar la secuencia del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
7 \quad 0 + 1 &= 1\\
7 \quad 1 + 1 &= 8\\
7 \quad 2 + 1 &= 15\\
7 \quad 3 + 1 &= 22\\
&\vdots\\
7 \quad 100 + 1 &= 701\\
7 \quad 120 + 1 &= 841\\
7 \quad 140 + 1 &= 981\\
7 \quad 142 + 1 &= 995\\
7 \quad 143 + 1 &= 1002
\end{aligned}$$

Con lo cual el mayor número de tres dígitos en la secuencia es 995.

Solución del problema 3: Imaginemos que solo usa el 1 y el 2 para formar los números de cuatro cifras, por lo tanto puede formar los siguientes 6 números: 1122, 1221, 1212, 2121, 2112, 2211

Algo similar va a ocurrir si solo usa los números: 1 y 3 ; 1 y 4 ; 2 y 3 ; 2 y 4 ; 3 y 4 ; claramente por cada una de esas parejas se pueden formar 6 nuevos números.

Por lo tanto la cantidad de números que puede escribir Jorge es $6 \quad 6 = 36$.

Solución del problema 4: El arco AD tiene la mitad del perímetro de una circunferencia de radio 6, el arco AB junto al arco BC forman una circunferencia de radio $\frac{3}{2}$ y el arco CD tiene la mitad del perímetro de una circunferencia de radio 3. Por lo tanto el perímetro de la figura es:

$$P_{erímetro} = \overline{AD} + \quad \overline{AB} + \overline{BC} \quad + \overline{CD} = \frac{2 \quad p \quad 6}{2} + 2p\frac{3}{2} + \frac{2 \quad p \quad 3}{2} = 6p + 3p + 3p = 12p$$

Para hallar el área sombreada, de la figura, podemos darnos cuenta que la región sombreada bajo el diámetro AD la podemos ubicar en el arco BC por tanto el área sombreada es:

$$Área_{sombreada} = \frac{p \quad 6^2}{2} \quad \frac{p \quad 3^2}{2} = \frac{36p \quad 9p}{2} = \frac{27p}{2}$$

Solución del problema 5: La suma de todos los números es $\frac{2019 \quad 2020}{2} = 2019 \quad 1010$ que es un número par.

Luego al quitarle dos números cualesquiera, representados por a y b tenemos:

$$2019 \quad 1010 \quad a \quad b$$

y finalmente se los sustituye por su diferencia, es decir:

$$2019 \quad 1010 \quad a \quad b + (a \quad b) = 2019 \quad 1010 \quad 2b$$

que también es un número par, con lo cual vemos que al final el único número que puede quedar es un número par, y por lo tanto es imposible que se tenga al final el número 3.

2.3.2 NIVEL A

Solución del problema 1: Si en la clave deben existir 3 múltiplos de cuatro, estos números solo pueden ser $4, 4, 8$; $8, 8, 4$; $4, 4, 4$; $8, 8, 8$, con lo cual solo analizaremos la mitad de los casos.

Imaginemos que solo existen 2 cuatros y 1 ocho, por lo tanto solo podemos ubicar de 6 maneras diferentes 2 cuatros y de 1 forma 3 cuatros:

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 1	4		4		
caso 2	4			4	
caso 3	4				4
caso 4		4		4	
caso 5		4			4
caso 6			4		4
caso 7	4		4		4

En cada caso vamos a ubicar un 8 en alguna casilla, con lo cual quedaran dos casillas libres, en las cuales debemos escribir los dos múltiplos 3 bajo la consideración que si las casillas están juntas solo podemos escribir 6 números, y si las casillas están separadas podemos escribir 9 números.

Ahora ilustraremos todos los casos, teniendo en cuenta que el caso 1 e igual al caso 6, así como el caso 2 e igual al caso 5, por ser simétricos.

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 1 y 6	4	8	4		
	4		4	8	
	4		4		8

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 2 y 5	4	8		4	
	4		8	4	
	4			4	8

Caso 1 y 6 tenemos: $2(6 + 9 + 9) = 2(24) = 48$ claves posibles.
Caso 2 y 5 tenemos: $2(6 + 9 + 9) = 2(24) = 48$ claves posibles.
Caso 3 tenemos: $6 + 6 + 9 = 21$ claves posibles.
Caso 4 tenemos: $9 + 9 + 9 = 27$ claves posibles.
Caso 7 tenemos: 9 claves posibles.

Puesto que solo hemos analizado la mitad de los casos, entonces la cantidad total de claves es $2(48 + 48 + 21 + 27 + 9) = 2(153) = 306$

Solución del problema 2: En un hexágono regular, todos los lados son iguales y sabemos que se puede dividir en 6 triángulos equiláteros. Como el perímetro es 96, entonces el lado l es igual $\frac{96}{6} = 16$ cm. Además, las diagonales mayores son iguales a dos veces el lado, entonces $AD = 32$ cm. Concluimos que el perímetro de $ABCD$ es igual a $16 + 16 + 16 + 32 = 80$ cm.

Sea A el área de uno de los triángulos equiláteros. El área de $4ACD$ es igual $2A$ pues AD es el doble del lado y la distancia de C a AD es la altura del triángulo equilátero. Como M es el punto medio, entonces el área de $4ADM$ es igual a la mitad del área de $4ACD$ y por ende es igual a A. Claramente, el área del cuadrilátero

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 3	4	8			4
	4		8		4
	4			8	4

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 4	8	4		4	
		4	8	4	
		4		4	8

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5
caso 7	4		4		4

$ABCD$ es igual a $3A$ y por tanto área del cuadrilátero $ABCM$ es igual a $3A - A = 2A$. Finalmente, sabemos que $A = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = 64\sqrt{3}$ y concluimos que el área del cuadrilátero $ABCM$ es igual a $2A = 128\sqrt{3}$ cm^2.

Solución del problema 3: El menor entero de cuatro dígitos es 1000, que también es múltiplo de 8, puesto que se le puede extraer tres veces la mitad, con lo cual podemos ahora escribir:

Si $N + 25 = 1000$, entonces $N = 1000 - 25 = 975$
Si $N + 25 = 1008$, entonces $N = 1008 - 25 = 983$
Si $N + 25 = 1016$, entonces $N = 1016 - 25 = 991$
Si $N + 25 = 1024$, entonces $N = 1024 - 25 = 999$
Si $N + 25 = 1032$, entonces $N = 1032 - 25 = 1007$

Por lo tanto en menor número de 4 dígitos que puede tomar N es 1007.

Solución del problema 4:
Solución A Hallando los factores primos de 720 tenemos:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Luego la cantidad de divisores de 720 es $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$

Sea P el producto de todos los divisores de 720, por tanto:

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 180 \cdot 240 \cdot 360 \cdot 720$$

Notamos el que producto del menor divisor por el mayor divisor, es decir $1 \cdot 720 = 720$, lo mismo sucede con el segundo menor divisor y el penúltimo, es decir $2 \cdot 360 = 720$, de manera similar ocurre lo mismo con el tercero y el antepenúltimo, es decir $4 \cdot 240 = 720$ y así sucesivamente hasta completar las 15 parejas de divisores, cuyo producto siempre es 720. Por lo tanto el producto $P = 720 \cdot 720 \cdots 720$ tiene 15 factores iguales, es decir $P = 720^{15}$

Solución B Hallando los factores primos de 720 tenemos:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Luego la cantidad de divisores de 720 es $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$

Para hallar el producto de todos los divisores podemos hacerlo multiplicando las 15 parejas del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
1 &\quad (2^4 \quad 3^2 \quad 5) = 720\\
2 &\quad (2^3 \quad 3^2 \quad 5) = 720\\
2^2 &\quad (2^2 \quad 3^2 \quad 5) = 720\\
2^3 &\quad (2 \quad 3^2 \quad 5) = 720\\
2^4 &\quad (3^2 \quad 5) = 720\\
3 &\quad (2^4 \quad 3 \quad 5) = 720\\
3^2 &\quad (2^4 \quad 5) = 720\\
5 &\quad (2^4 \quad 3^2) = 720\\
(2 \quad 3) &\quad (2^3 \quad 3 \quad 5) = 720\\
(2 \quad 3^2) &\quad (2^3 \quad 5) = 720\\
(2^2 \quad 3) &\quad (2^2 \quad 3 \quad 5) = 720\\
(2^2 \quad 3^2) &\quad (2^2 \quad 5) = 720\\
(2^3 \quad 3) &\quad (2 \quad 5) = 720\\
(2 \quad 5) &\quad (2^3 \quad 3^2) = 720\\
(3 \quad 5) &\quad (2^4 \quad 3) = 720
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el producto de todos los divisores de 720 es 720^{15}.

Solución del problema 5: Un problema equivalente es:

$$
\begin{array}{r}
TRAE\\
3\\
\hline
AGUA
\end{array}
$$

Con lo cual podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3E = A \text{ ó } 3E = A + 10l_1 &\text{ con } l_1 = 0,1,2\\
3A + l_1 = U \text{ ó } 3A + l_1 = U + 10l_2 &\text{ con } l_2 = 0,1,2\\
3R + l_2 = G \text{ ó } 3R + l_2 = G + 10l_3 &\text{ con } l_3 = 0,1,2\\
3T + l_3 &= A
\end{aligned}
$$

De la última ecuacion se desprende que $A \quad 3$ y $T \quad 3$

Puesto que $A \neq 1$, entonces $E \neq 7$.

Si $E = 5$, entonces $E = A = 5$, y por tanto $E \neq 5$.

Si $E = 1$, entonces $A = 3$, luego $T = E = 1$, por tanto $E \neq 1$.

Si $E = 2$, entonces $A = 6$, luego $3T + l_3 = 6$, con lo cual $T = E = 2$ y $l_3 = 0$ por tanto $E \neq 2$.

Si $E = 4$, entonces $A = 2$, ya que $A \quad 3$ por tanto $E \neq 4$.

Si $E = 3$, entonces $A = 0$, con lo cual $T = E = 3$ por tanto $E \neq 3$.

Si $E = 8$, entonces $A = 4$, con lo cual $U = A = 4$ por tanto $E \neq 8$.

Si $E = 9$, entonces $A = 7$, con lo cual $T = 2$ por tanto $3T + l_3 = 7$ es decir $l_3 = 1$ y con ningún dígito R se consigue la igualdad, y concluimos que $E \neq 9$.

Si $E = 6$, entonces $A = 8$, con lo cual $T = 2$ y solamente con $R = 7$ se consigue la igualdad, y concluimos que $T = 2$, $R = 7$, $A = 8$, $E = 6$, $G = 3$, $U = 5$ para que 2786   3 = 8358.

2.3.3 NIVEL 1

Solución del problema 1: En un hexágono regular, todos los lados son iguales y sabemos que se puede dividir en 6 triángulos equiláteros. Como el perímetro es 96, entonces el lado l es igual $\frac{96}{6} = 16$ cm. Además, las diagonales mayores son iguales a dos veces el lado, entonces $AD = 32$ cm. Concluimos que el perímetro de $ABCD$ es igual a $16 + 16 + 16 + 32 = 80$ cm.

Sea A el área de uno de los triángulos equiláteros. El área de $\triangle ACD$ es igual $2A$ pues AD es el doble del lado y la distancia de C a AD es la altura del triángulo equilátero. Como M es el punto medio, entonces el área de $\triangle ADM$ es igual a la mitad del área de $\triangle ACD$ y por ende es igual a A. Claramente, el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $3A$ y por tanto área del cuadrilátero $ABCM$ es igual a $3A - A = 2A$. Finalmente, sabemos que $A = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = 64\sqrt{3}$ y concluimos que el área del cuadrilátero $ABCM$ es igual a $2A = 128\sqrt{3}$ cm^2.

Solución del problema 2:
Solución A Sea x la cantidad de monedas de 0,20 y $198 - x$ la cantidad de monedas de 3. Luego

$$594 - 2.80x = 3(198 - x) + 0.20x = 190.80$$

$$\Longrightarrow \quad 2.80x = 403.20 \quad \Longrightarrow \quad x = 144$$

Concluimos que hay 144 monedas 0,20 y $198 - 144 = 54$ monedas de 3.
Solución B Apliquemos el principio del caso extremo y supongamos que solo tenemos monedas de 0,20 en la alcancía. El total sería: $198 \cdot 0,20 = 39,60$ Pero tenemos 190,80 lo que significa que:

$$190,80 - 39,60 = 151,20$$

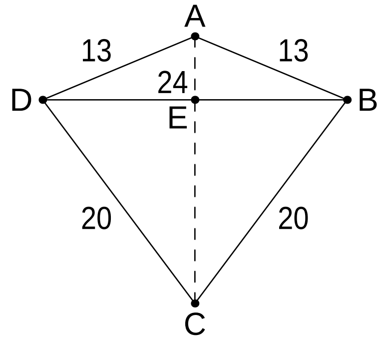
Por cada moneda de 0,20 que cambio por una de 3, gano 2,80. Para pasar de 39,60 a 190,80, ¿cuántas monedas de 0,20 debo cambiar por de 3?

Claramente eso se obtiene dividiendo 151,20 para 2,80.
Así: 151,20 : 2,80 = 54.
Luego, tenemos 54 monedas de 3 y 144 de 0,20.

Solución del problema 3: Se puede ver que un número creciente no puede terminar en cero. Se consideran todos los enteros positivos de cuatro cifras que no terminan en cero, se tienen en total $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 8100$ enteros de ese tipo. Entre ellos hay $9 \cdot 10 = 90$ números de la forma $\overline{ABBA}$, donde $1 \le A \le 9$ y $0 \le B \le 9$, luego, hay $8100 - 90 = 8010$ enteros que no son de la forma $ABBA$. Agrupando a cada uno de estos con sus reversos (al $\overline{ABCD}$ se lo agrupa con $\overline{DCBA}$), se obtienen $\frac{8010}{2} = 4005$ pares, y como en cada par sólo uno de ellos es creciente, la respuesta es 4005.

Solución del problema 4: Si un número deja resto 5 en la división para 7, entonces deja resto 5, 12, 19, 26 o 33 en la división para 35. De los valores anteriores, sólo 33 deja resto 3 en la división para 5. Luego N deja resto 33 en la división para 35.
Si un número deja resto 2 en la división para 3, entonces deja resto 2 o 5 en la división para 6. De los valores anteriores, sólo 5 deja resto 1 en la división para 2. Luego N deja resto 5 en la división para 6.
Se tiene que $N = 35k + 33$. 33 deja resto 3 en la división para 6 y 35 deja resto 5 en la división, entonces N deja resto $5k + 3$ en la división para 6. Si k deja resto 4 en la división para 6, entonces N deja resto $5 \cdot 4 + 3 = 23$ en la división para 6, es decir, N deja resto 5 en la división para 6. Finalmente concluimos que $N = 35(6r + 4) + 33 = 210r + 173$. Los posibles valores de $N < 1000$ son 173, 383, 593, 803.

Solución del problema 5:



Sea E el punto de intersección de AC y BD. Primero veamos que dado que $AB = AD = 13$ y $BC = CD = 20$, entonces AC es un eje de simetría del cuadrilátero. De lo anterior se tiene que AC es perpendicular a BD y $BE = ED = 12$.
Usando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$
$$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$$

Área$(ABD) = \frac{5 \cdot 24}{2} = 60$, Área$(BCD) = \frac{16 \cdot 24}{2} = 192$ y Área$(ABCD) = 60 + 192 = 252$. Sea r el radio de la circunferencia, entonces el área del cuadrilátero es igual al semiperímetro por el radio. Entonces Área$(ABCD) = r\frac{AB + BC + CD + DA}{2} \implies 252 = r\frac{2(13) + 2(20)}{2} \implies r = \frac{84}{11}$

2.3.4 NIVEL 2

Solución del problema 1: Sabemos que los números que pueden ser expresados como potencias mayores a uno son: 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100.
Tenemos que $f(4) = f(9) = f(25) = f(36) = f(49) = f(100) = 2$, $f(8) = f(27) = 3$, $f(16) = f(81) = 4$, $f(32) = 5$ y $f(64) = 6$. Con lo que

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(100) = [f(2) + \ldots + f(99)] + [f(4) + f(8) + f(9) + \ldots + f(100)]$$

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(100) = 87 + (6 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + 5 + 6$$

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(100) = 124$$

Solución del problema 2:
Solución A Sean A, B, C los vértices consecutivos del hexágono, luego $AP = BP = 8$m y $CP = 16$. Sea l el lado del hexágono regular. Como sabemos el lado es igual al radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular, luego basta hallar l.
Supongamos que $\angle PBA = a$, luego $\angle PBC = 120° - a$. Además, $l = AB = 2 \cdot 8\cos a = 16\cos a$. Por otro lado, en el triángulo BCP, se tiene que

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2PB \cdot PC\cos(120° - a)$$

$$\Rightarrow \quad 256 = l^2 + 64 - 16l\cos(120° - a) \quad \Rightarrow \quad l^2 - 16l\cos(120° - a) - 192 = 0$$

Reemplazando en la expresión anterior se tiene que

$$256(\cos a)^2 - 256\cos a\cos(120° - a) - 192 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4(\cos a)^2 - 4\cos a\left(-\frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6(\cos a)^2 - 2\sqrt{3}\cos a \sin a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(\cos a)^2 - 2\sqrt{3}\cos a \sin a - 3(\sin a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\sin a + \sqrt{3}\cos a)(-3\sin a + \sqrt{3}\cos a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ o } \tan a = -\sqrt{3}$$

Como $a \in (0°, 90°)$, entonces $a = 30°$ y $l = 8\sqrt{3}$.
Solución A Supongamos que $\angle PBC = 90°$, luego $\angle PBA = \angle PAB = 120° - 90° = 30°$, entonces $AB = 2 \cdot 8\cos 30° = 8\sqrt{3}$ Además, en el triángulo rectángulo BCP, se tiene que

$$\sin\angle PCB = \frac{PB}{PC} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle PCB = 30°$$

$$\Rightarrow \quad BC = CP\cos\angle 30° = 8\sqrt{3}$$

En este caso se tiene que $l = AB = BC = 8\sqrt{3}$.

Solución del problema 3: Sean $x = a + 1 > 0$, $y = b + 1 > 0$, entonces

$$1 = ab = (x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1 \quad \Rightarrow \quad xy = x + y$$

Reemplazando se tiene que

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3x-2}{y} + \frac{3y-2}{x} = \frac{3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y}{xy} = \frac{3(x^2+y^2) - 2(x+y)}{xy}$$

Por la desigualdad MA-MG se tiene que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ con igualdad si y sólo si $x = y$, entonces

$$3(x^2+y^2) - 2(x+y) \geq 6xy - 2(x+y) = 4xy$$

En la última igualdad se usó el hecho $xy = x + y$. Como $xy > 0$, la desigualdad anterior implica que

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3(x^2+y^2) - 2(x+y)}{xy} \geq 4$$

La igualdad se da si y sólo si $x = y$, es decir, $a = b = 1$.

Solución del problema 4: Sea $2a - b = x^2$, $a - 2b = y^2$, $a + b = z^2$, entonces $a = \frac{2x^2 - y^2}{3}$ y $b = \frac{x^2 - 2y^2}{3}$. Si 3 no divide a x, entonces x^2 deja resto 1 en la división para 3 y y^2 deja resto 0 o 1 en la división para 3. Por tanto $2x^2 - y^2$ deja resto 1 o -1 en la división para 3 y por ende a no puede ser entero. Entonces 3 divide a x, lo cual implica que 3 divide a y para que a sea entero.
Existen enteros positivos u, v tales que $x = 3u$, $y = 3v$. Luego $a = 3(2u^2 - v^2)$ y $b = 3(u^2 - 2v^2)$, entonces 3 divide a $a + b = z^2$ y por tanto 3 divide a z. Existe un entero positivo w tal que $z = 3w$. Entonces $a + b = 9w^2$. Ahora tenemos que

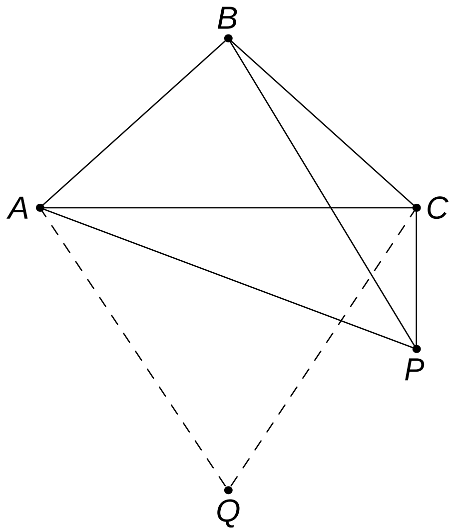
$$9w^2 = z = a + b = 3(2u^2 - v^2) + 3(u^2 - 2v^2) = 9u^2 - 9v^2 \implies v^2 + w^2 = u^2$$

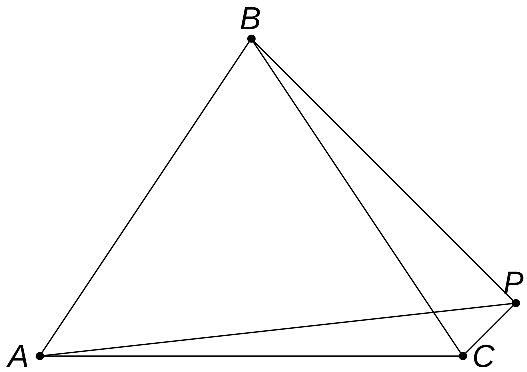
Además como x, y, z son distintos, entonces u, v, w son distintos.
Para que b sea mínimo, basta hallar la terna pitagórica (v, w, u) con u, v, w distintos donde $u^2 - 2v^2 = w^2 - v^2 > 0$ tome el mínimo valor posible. Para la terna $(3, 4, 5)$, se tiene que $w^2 - v^2 = 7$. Para todo otra terna con los 3 términos distintos se tiene que $v > 3$ y por tanto

$$w^2 - v^2 \geq (v+1)^2 - v^2 = 2v + 1 > 7$$

Se concluye que el mínimo valor de b es 21 y se cumple para la dupla $(a, b) = (123, 21)$ que claramente cumple las condiciones del problema.

Solución del problema 5:





i) Supongamos que P está en el interior del ángulo ABC. Luego $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC = 100^\circ$ y por ende $\angle BAC = \angle BCA = 40^\circ$.
Definimos el punto Q tal que ACQ es equilátero y B y Q se encuentran en diferentes semiplanos con respecto a AC. Luego BQ es la mediatriz del segmento AC. Sabemos que $AC = BP$, por ende $AQ = BP$; además

$$\angle PBA + \angle BAQ = \angle PBA + \angle BAC + \angle CAQ = 80^\circ + 40^\circ = 60^\circ = 180^\circ$$

Por lo que $ABPQ$ es un paralelogramo. Luego tenemos que $BC = AB = PQ$, $BP = AQ = CQ$. Entonces $BPQ \cong BCQ$ por el criterio (l, l, l), por ende $BQ \parallel CP$.
Como $\angle BCP = 180^\circ - \angle CBQ$ y sabemos que BQ es la bisectriz del triángulo ABC, tenemos que $\angle BCP = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
ii) Supongamos que P está en el exterior del ángulo ABC. Luego $\angle ABC = \angle ABP - \angle PBC = 60^\circ$ y por ende $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$ y $AB = BC = CA$.
Entonces $BP = AC = BC$ y el $\triangle BPC$ es isósceles con $\angle CBP = 20^\circ$ y por ende $\angle BCP = 80^\circ$.

2.3.5 NIVEL 3

Solución del problema 1:
Solución A Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ las medidas de los ángulos en grados, luego $a + b + c = 180$. Para que dos triángulos sean semejantes, basta que los ángulos de uno sean alguna permutación del otro. Luego sin pérdida de generalidad asumimos que $a \le b \le c$. Luego $a \le 60$ y

$$b \le c = 180 - a - b \implies 2b \le 180 - a \implies a \le b \le 90 - \frac{a}{2}$$

Si $a = 2k - 1$ con $1 \le k \le 30$, entonces $2k - 1 \le b \le 90 - k$ y b puede tomar $90 - k - 2k + 1 + 1 = 92 - 3k$ valores, luego hay $92 - 3(1) + 92 - 3(2) + \ldots + 92 - 3(30) = 92(30) - 3(15)(31) = 1365$ casos.
Si $a = 2k$ con $1 \le k \le 30$, entonces $2k \le b \le 90 - k$ y b puede tomar $90 - k - 2k + 1 = 91 - 3k$ valores, luego hay $91 - 3(1) + 91 - 3(2) + \ldots + 91 - 3(30) = 91(30) - 3(15)(31) = 1335$ casos.
En total hay $1365 + 1335 = 2700$ triángulos distintos con ángulos enteros.
Solución B Si el triángulo es equilátero, entonces hay un sólo caso posible.
Si el triangulo es isósceles, entonces hay dos opciones: $a = b < c$ o $a < b = c$. Supongamos $a = b < c$, entonces $c = 180 - 2a$ entonces a puede tomar cualquier valor entre 1 y 59 que resulta en 59 casos. Supongamos $a < b = c$, entonces $c = 90 - \frac{a}{2}$ entonces a puede tomar cualquier valor par entre 1 y 59 que resulta en 29 casos. En total hay $59 + 29 = 88$ casos para este tipo de triángulos.
Si el triangulo es escaleno, entonces $a < b < c$ y

$$b < c = 180 - a - b \implies 2b < 180 - a \implies a + 1 \le b < 90 - \frac{a}{2}$$

Si $a = 2k - 1$ con $1 \le k \le 30$, entonces $2k \le b \le 90 - k$ y b puede tomar $90 - k - 2k + 1 = 91 - 3k$ valores, luego hay $91 - 3(1) + 91 - 3(2) + \ldots + 91 - 3(30) = 91(30) - 3(15)(31) = 1335$ casos.
Si $a = 2k$ con $1 \le k \le 29$, entonces $2k + 1 \le b \le 89 - k$ y b puede tomar $89 - k - 2k - 1 + 1 = 89 - 3k$ valores, luego hay $89 - 3(1) + 89 - 3(2) + \ldots + 89 - 3(29) = 89(29) - 3(15)(29) = 1276$ casos.
En total hay $1335 + 1276 = 2611$ casos para este tipo de triángulos.
Se concluye que hay $1 + 88 + 2611 = 2700$ triángulos distintos con ángulos enteros.

Solución del problema 2: Sea $2a - b = x^2$, $a - 2b = y^2$, $a + b = z^2$, entonces $a = \frac{2x^2 - y^2}{3}$ y $b = \frac{x^2 - 2y^2}{3}$. Si 3 no divide a x, entonces x^2 deja resto 1 en la división para 3 y y^2 deja resto 0 o 1 en la división para 3. Por tanto $2x^2 - y^2$ deja resto 1 o -1 en la división para 3 y por ende a no puede ser entero. Entonces 3 divide a x, lo cual implica que 3 divide a y para que a sea entero.
Existen enteros positivos u, v tales que $x = 3u$, $y = 3v$. Luego $a = 3(2u^2 - v^2)$ y $b = 3(u^2 - 2v^2)$, entonces 3 divide a $a + b = z^2$ y por tanto 3 divide a z. Existe un entero positivo w tal que $z = 3w$. Entonces $a + b = 9w^2$.
Ahora tenemos que

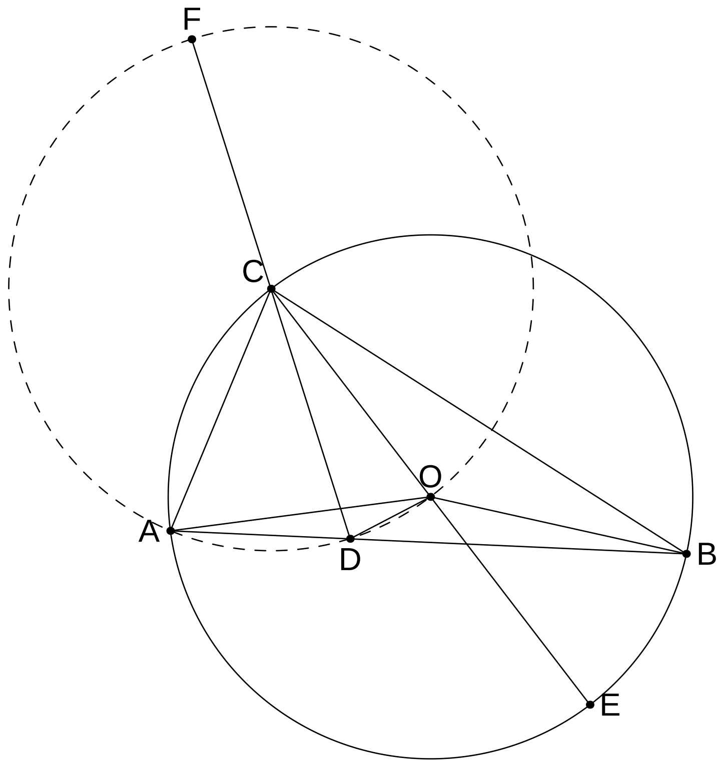
$$9w^2 = z = a + b = 3(2u^2 - v^2) + 3(u^2 - 2v^2) = 9u^2 - 9v^2 \implies v^2 + w^2 = u^2$$

Además como x, y, z son distintos, entonces u, v, w son distintos.
Para que b sea mínimo, basta hallar la terna pitagórica (v, w, u) con u, v, w distintos donde $u^2 - 2v^2 = w^2 - v^2 > 0$ tome el mínimo valor posible. Para la terna $(3, 4, 5)$, se tiene que $w^2 - v^2 = 7$. Para todo otra terna con los 3 términos distintos se tiene que $v > 3$ y por tanto

$$w^2 - v^2 \ge (v + 1)^2 - v^2 = 2v + 1 > 7$$

Se concluye que el mínimo valor de b es 21 y se cumple para la dupla $(a, b) = (123, 21)$ que claramente cumple las condiciones del problema.

Solución del problema 3:



Trazamos el segmento AC, los radios AO, OB y el diámetro CE. Ahora hallemos algunos ángulos:

En $\triangle BCD$ tenemos: $\angle CDB = 110^\circ \Rightarrow \angle ADC = 70^\circ$

El $\triangle OCB$ es isósceles por tanto: $\angle CBO = 20^\circ \Rightarrow \angle OBA = 10^\circ$

El $\triangle AOB$ es isósceles por tanto: $\angle BAO = 10^\circ \Rightarrow \angle OBA = 10^\circ$

El ángulo $\angle ECB = 20^\circ$ está inscrito en la circunferencia de centro O, por tanto su angulo central es el doble, es decir, $\angle BOE = 40^\circ$.

En el $\triangle AOB$ tenemos: $\angle EOA = 180^\circ - 10^\circ - 10^\circ - 40^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$

El $\triangle AOC$ es equilátero puesto que $AO = CO$ y $\angle AOC = 60^\circ \Rightarrow AO = CO = AC \Rightarrow \angle OAC = 60^\circ$

El $\triangle ACD$ es isósceles puesto que $\angle DAC = \angle CDA$ por tanto: $AC = CD = CO$

Con lo cual existe una circunferencia con centro en C que pasa por A, D, O, luego trazamos el diámetro DF con lo cual $\angle OCF = 180^\circ - \angle DCO = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$, y finalmente vemos que $\angle CDO$ sostiene la misma cuerda que en ángulo central $\angle FCO$, es decir $\angle CDO = \dfrac{160^\circ}{2} = 80^\circ$.

Solución del problema 4: La ecuación dada corresponde a las raíces de un polinomio cúbico. Sean a, b, c las raíces de la ecuación, entonces por las relaciones de Cardano - Vieta debe cumplirse:

$$\begin{aligned} a + b + c &= \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2 \\ ab + bc + ac &= \log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3 \\ abc &= 1 \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que las raíces de la ecuación son $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$ y $c = \log_5 2$. Claramente cumplen la primera ecuación:

$$a + b + c = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2$$

Ahora consideremos

$$ab + bc + ac = \log_2 3 \ \ \log_3 5 + \log_3 5 \ \ \log_5 2 + \log_2 3 \ \ \log_5 2$$
$$ab + bc + ac = \frac{1}{\log_3 2} \ \ \log_3 5 + \frac{1}{\log_5 3} \ \ \log_5 2 + \log_2 3 \ \ \frac{1}{\log_2 5}$$
$$ab + bc + ac = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} + \frac{\log_5 2}{\log_5 3} + \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3$$

vemos que también cumple la segunda ecuación. Finalmente consideremos

$$abc = \log_2 3 \ \ \log_3 5 \ \ \log_5 2 = \frac{1}{\log_3 2} \ \ \log_3 5 \ \ \log_5 2$$
$$abc = \log_2 5 \ \ \log_5 2 = 1$$

vemos que también cumple la tercera ecuación. Por lo tanto queda demostrado que las soluciones de la ecuación son: $\log_2 3$, $\log_3 5$ y $\log_5 2$.

Solución del problema 5: Si $i \in S$, entonces tomando $i = j$ se tiene que $\frac{i+i}{(i,i)} = \frac{2i}{i} = 2 \in S$. Entonces 2 pertenece a S.

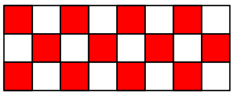
Sea m un número impar. Si $m \in S$, entonces $(m, 2) = 1$, $\frac{m+2}{(m,2)} = m + 2$ y $m + 2 \in S$. Inductivamente se concluye que todos el número $m + 2n \in S$ para todo entero positivo n. Entonces S es infinito, lo cual contradice las propiedades del conjunto S. Entonces S no contiene números impares.

Supongamos que S contiene más de un elemento, por lo anterior necesariamente son todos pares. Sea m el menor número mayor a 2 que pertenece a S, entonces $(m, 2) = 2$ y $\frac{m+2}{(m,2)} = \frac{m}{2} + 1$. Pero $2 < \frac{m}{2} + 1 < m$ y $\frac{m}{2} + 1 \in S$. Lo cual contradice la suposición de que m es el mínimo elemento mayor a 2 de S. Se concluye que $S = \{2\}$.

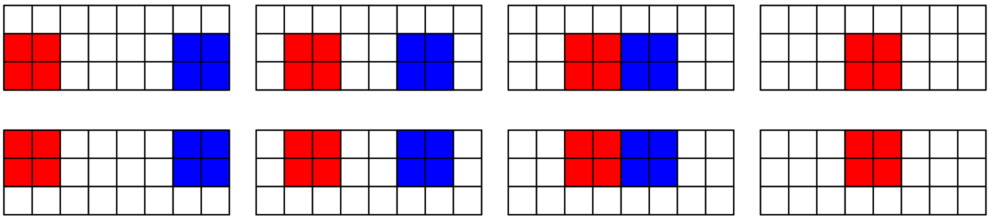
2.4 FASE FINAL

2.4.1 NIVEL A

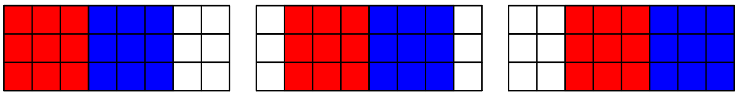
Solución del problema 1: Existen 24 cuadrados de 1 1:



Existen 14 cuadrados de 2 2:



Existen 6 cuadrados de 3 3:



Luego tenemos 24 + 14 + 6 = 44 cuadrados en la figura.

Solución del problema 2: La distancia entre A y D es: $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$
Puesto que la distancia entre A y D esta dividida en 3 partes iguales, entonces cada una de estas partes mide $\frac{5}{12} \quad 3 = \frac{5}{12} \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$

Finalmente podemos responder:

A) La distancia de O hasta B es $\frac{1}{3} + \frac{5}{36} = \frac{17}{36}$.

B) La distancia de O hasta C es $\frac{17}{36} + \frac{5}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

Solución del problema 3: Los dos números que están al lado del 9 deben sumar 11 para que entre los tres sumen 20, por tanto tenemos las siguientes posibilidades para los tres números: 9 + 2 + 9 ; 9 + 3 + 8 ; 9 + 4 + 7 ; 9 + 5 + 6.

Luego vemos que los números 9 + 4 + 7 involucran dos de los números que están en la tarjeta de crédito, con lo cual podemos escribirlos de la siguiente manera:.

		7	9	4			x				7	9	4

Y nos damos cuenta que se pueden repetir los números en grupos de tres:

9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4

Ahora podemos decir que en el lugar de la x se encuentra el número 4.

Solución del problema 4: En el tablero superior izquierdo de 2 2 deben estar los números del 1 al 4, por tanto la única posibilidad es:

1	4	3	
3	2		
	P		
			4

En el tablero de 4 4, en la primera fila podemos ubicar el 2 y además en la primera columna deben estar los números del 1 al 4, por tanto la única posibilidad es:

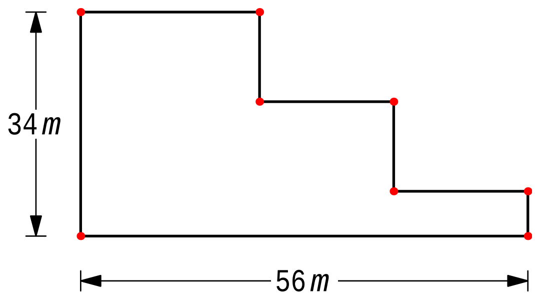
1	4	3	2
3	2		
4	P		
2			4

En el tablero de 4 4, en la cuarta columna deben estar los números del 1 al 4, por tanto la única posibilidad es:

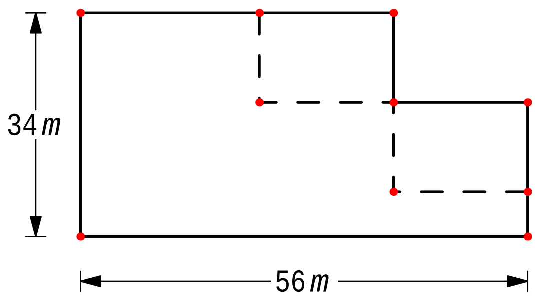
1	4	3	2
3	2		1
4	P		3
2			4

Finalmente el único valor que debe tener P es 1.

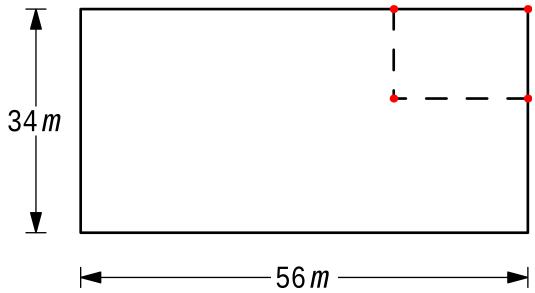
Solución del problema 5: Imaginemos que los bordes de la figura están formados por una cuerda sujeta por clavos en sus vértices.



Agregando dos clavos puedo pasar la cuerda sin estirarla o acortarla y formar:



Luego puedo agregar un clavo más para mover nuevamente la cuerda, sin acortarla o estirarla, y obtener la siguiente figura:



Por tanto se necesitan $2(34 + 56) = 180$ metros para cercar el terreno de la figura.

Solución del problema 6: Andrea siempre podrá ganar el juego con la siguiente estrategia:

Caso 1:
Si Jorge quita del montón 1 ficha, Andrea debe sacar 1 ficha también, luego quedan 7 fichas en el montón, ahora Jorge puede sacar $1, 3$ ó 4 fichas:
Si Jorge saca 1 ficha, Andrea debe sacar 4 ficha y quedan 2 fichas en el montón y Jorge solo puede sacar 1 ficha, con lo cual Andrea gana al sacar la última ficha.
Si Jorge saca 3 fichas, Andrea debe sacar 4 fichas y gana.
Si Jorge saca 4 fichas, Andrea debe sacar 3 fichas y gana.

Caso 2:
Si Jorge quita del montón 3 fichas, Andrea debe sacar 4 fichas, luego quedan 2 fichas en el montón y Jorge solo puede sacar 1 ficha, con lo cual Andrea gana al sacar la última ficha.

Caso 3:
Si Jorge quita del montón 4 fichas, Andrea debe sacar 3 fichas, luego quedan 2 fichas en el montón y Jorge solo puede sacar 1 ficha, con lo cual Andrea gana al sacar la última ficha.

2.4.2 NIVEL 1

Solución del problema 1: Supongamos que $n = 10a + b$ cumple, luego

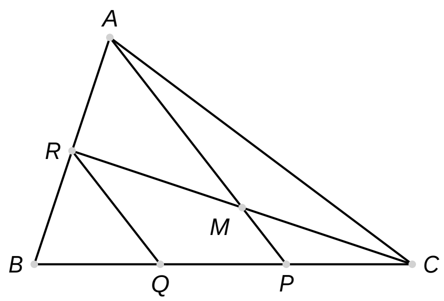
$$10a + b = k(a + b) \implies (10 - k)a = (k - 1)b$$

Reemplazamos $r = k - 1$ entonces $(9 - r)a = rb$. Sabemos que $a > 0$. Si $b = 0$, entonces $9 - r = 0$ y a puede tomar cualquier valor. Luego hay 9 casos.
Ahora consideremos $b > 0$. a, b son dígitos no nulos, se tiene que $1 \leq r \leq 8$. También $1 \leq 9 - r \leq 8$ y $9 - r + r = 9$, luego por simetría basta considerar los casos $1 \leq r \leq 4$ y el total será el doble de los casos considerados

- $r = 1$, entonces $8a = b$. Luego 8 divide a b y hay un caso.
- $r = 2$, entonces $7a = 2b$. Luego 7 divide a b y hay un caso.
- $r = 3$, entonces $2a = b$. Luego b es par y hay 4 casos.
- $r = 4$, entonces $5a = 4b$. Luego 5 divide a b y hay un caso.

Concluimos que hay en total $9 + 2(3 + 4) = 23$ números que cumplen con la propiedad.

Solución del problema 2:

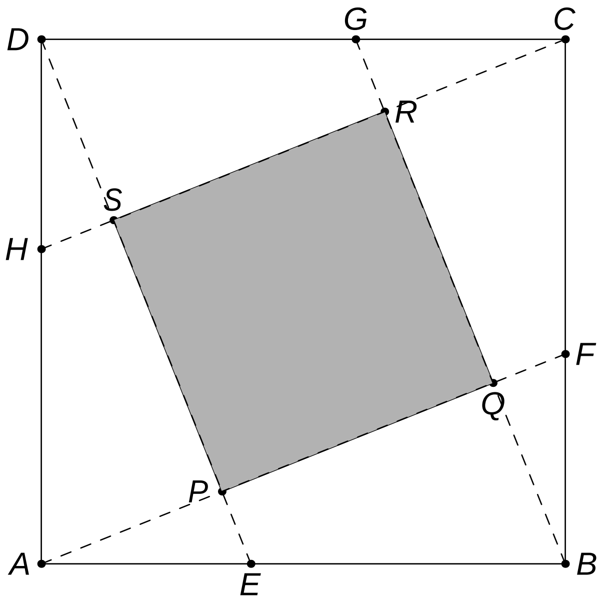


Sea Q el punto medio de BP, entonces $BQ = PQ = CP = \frac{1}{3} BC$. Sea R el punto medio de AB, entonces RQ es paralela media de ABP, de donde $RQ \parallel AP$. Sea M la intersección de AP con CR entonces $MP \parallel RQ$ con lo que MP es paralela media de CQR por lo que M es el punto medio de CR, y así se concluye que AP biseca la mediana del triángulo ABC trazada desde C.

Solución del problema 3: Se divide la base en 25 triángulos equiláteros de lado 3 km. Claramente en cada triángulo pequeño, dos puntos siempre están a una distancia menor que 3 km. Por el principio de las casillas, como $26 > 25$, entonces siempre hay al menos dos soldados en el mismo triángulo pequeño y por ende están en comunicación directa.

Solución del problema 4: Sea $A = \{x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2\}$ y $B = \{y - 4, y - 3, y - 2, y - 1, y, y + 1, y + 2, y + 3, y + 4\}$ donde x, y son enteros positivos y $y > 5$, $2 < x < 2017$.
Se sabe que la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, entonces $5x = 9y$. Luego 9 divide a $5x$ y por ende 9 divide a x. El máximo $x < 2017$ divisible para 9 es 2016. Se concluye que el máximo elemento de A es $x + 2 = 2016 + 2 = 2018$.

Solución del problema 5:



Denotemos $AB = l$ y por ende $AE = BF = CG = DH = al$. En cada uno de los triángulos DAE, ABF, BCG y CDH tiene un lado igual a al, otro lado igual a l y el ángulo comprendido entre ellos igual a 90°. Por tanto, los triángulos DAE, ABF, BCG y CDH son todos congruentes por el criterio LAL. Por ende se tiene que $AF = BG = CH = DE$ y se concluye que

$$\angle DSR = \angle ADE + \angle DHC = \angle ADE + \angle DEA = 90^\circ$$

$$\implies \quad \angle RSP = \angle DSH = 180^\circ - \angle DSR = 90^\circ$$

Análogamente se tiene que los otros ángulos de $PQRS$ son rectos y por tanto $PQRS$ es un rectángulo.
Los triángulos AEP, BFQ, CGR y DHS son todos congruentes por el criterio ALA, entonces $EP = FQ = GR = HS$ y $AP = BQ = CR = DS$. Luego se tiene que

$$PQ = QR = RS = SP = AF - PE - AP$$

Luego $PQRS$ es un rombo, pero anteriormente se demostró que es un rectángulo. Se concluye que $PQRS$ es un cuadrado.

Solución del problema 6: Denotamos S la suma de todos números. Para $n = 1$, el resultado es obvio. Para $n = 3$, denotemos a, b, c los números en la diagonal. Si sumamos los números del subtablero de 2×2 de la esquina inferior izquierda y de la esquina superior derecha tenemos que esta suma es igual a 0 y también es igual a la suma de todos los números menos a, menos c y más b, entonces

$$0 = S - a - c + b \implies S = a - b + c$$

$$-1 < a, -b, c < 1 \implies -3 < S < 3 \implies |S| < 3 = n$$

Sea $n = 2k + 1$, vamos a demostrar el resultado por inducción en k. Se puede dividir el tablero en un subtablero de $(2k - 1) \times (2k - 1)$ cuya suma es S_1, subtableros de $2 \times 2k$ y $2k \times 2$ cuya suma es 0. Sumando todos esos subtableros, se tiene cada número una vez excepto el último de la diagonal a que no aparece y el penúltimo de la diagonal b que aparece dos veces. Luego $S = S_1 - b + a$, pero $1 - 2k < S_1 < 2k - 1$ por la hipótesis inductiva y $-1 < -b, a < 1$, entonces se cumple que

$$-1 - 2k = 1 - 2k - 1 - 1 < S < 2k - 1 + 1 + 1 = 2k + 1.$$

Se concluye que $|S| < 2k + 1 = n$ y termina la inducción.

2.4.3 NIVEL 2

Solución del problema 1: Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 36 debe ser múltiplo de 2, con lo que $c \in \{2,4,6,8\}$.

Por otro lado para que $\overline{abc} - \overline{cba}$ sea múltplo de 36 entonces $\overline{cba}$ debe ser múltiplo de 36 con lo que $\overline{cba}$ debe ser múltiplo de 2, entonces $a \in \{2,4,6,8\}$.

Ahora veamos que $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$ lo cuál ya es múltiplo de 9, entonces para que dicha resta sea positiva y múltiplo de 36 basta con que $a - c$ sea un múltiplo de 4 positivo, así las únicas opciones que cumplen son $(a,c) \in \{(8,4),(6,2)\}$, pero como $\overline{abc}$ es múltiplo de 36 entonces debe serlo de 9 y de 4, por lo que $a + b + c$ es múltiplo de 9:

- Caso 1: $a + b + c = 8 + b + 4 = 12 + b$ es múltiplo de 9 entonces $b = 6$ generando el número 864 que se puede confirmar que cumple todas las condiciones.
- Caso 2: $a + b + c = 6 + b + 2 = 8 + b$ es múltiplo de 9 entonces $b = 1$ generando el número 612 que se puede confirmar que cumple todas las condiciones.

Así se concluye que los únicos números ecuatorianos son 864 y 612.

Solución del problema 2: La raíces de $x^2 + x + 1$ son $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Además, se tiene que $z_k^2 + z_k + 1 = 0$ y por tanto $z_k^3 - 1 = (z_k - 1)(z_k^2 + z_k + 1) = 0$, consecuentemente $z_k^3 = 1$.
Para que $x^2 + x + 1$ divida a $P(x) = x^{2^n} + x + 1$, $P(z_k) = 0$ para $k = 1,2$. Veamos que

$$z_k^{2^2} = z_k, z_k^{2^3} = z_k^2, z_k^{2^4} = z_k$$

Inductivamente es fácil ver que $z_k^{2^{2m}} = z_k$ y $z_k^{2^{2m-1}} = z_k^2$. Luego $P(z_k) = z_k^{2^n} + z_k + 1$, entonces $P(z_k) = 2z_k + 1 \neq 0$ para n par y $P(z_k) = z_k^2 + z_k + 1 = 0$ para n impar. Hay 49 impares entre 3 y 99 inclusive, luego para 49 valores de n se cumple lo pedido.

Solución del problema 3: La potencia del punto A en circunferencia circunscrita al triángulo BDC nos da

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC \iff AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$$

La potencia del punto C en circunferencia circunscrita al triángulo ABD nos da

$$CF \cdot BC = CD \cdot AC \iff CF = \frac{CD \cdot AC}{BC}$$

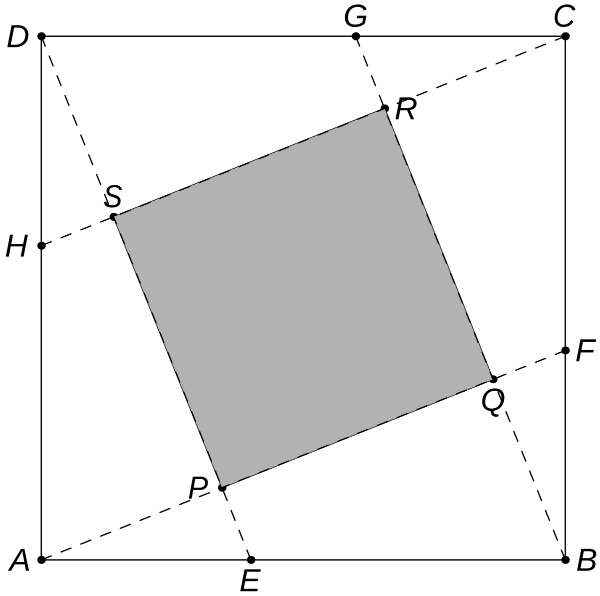
Combinando ambos resultados se tiene que

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\frac{AD \cdot AC}{AB}}{\frac{CD \cdot AC}{BC}} = \frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{CD}{BC}}$$

Finalmente el teorema de la bisectriz asegura que BD es la bisectriz si y sólo si

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} \iff \frac{AE}{CF} = 1 \iff AE = CF$$

Solución del problema 4:



Denotemos $AB = l$ y por ende $AE = BF = CG = DH = al$. En cada uno de los triángulos DAE, ABF, BCG y CDH tiene un lado igual a al, otro lado igual a l y el ángulo comprendido entre ellos igual a 90°. Por tanto, los triángulos DAE, ABF, BCG y CDH son todos congruentes por el criterio LAL. Por ende se tiene que $AF = BG = CH = DE$ y se concluye que

$$\angle DSR = \angle ADE + \angle DHC = \angle ADE + \angle DEA = 90^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad \angle RSP = \angle DSH = 180^\circ - \angle DSR = 90^\circ$$

Análogamente se tiene que los otros ángulos de $PQRS$ son rectos y por tanto $PQRS$ es un rectángulo.
Los triángulos AEP, BFQ, CGR y DHS son todos congruentes por el criterio ALA, entonces $EP = FQ = GR = HS$ y $AP = BQ = CR = DS$. Luego se tiene que

$$PQ = QR = RS = SP = AF - PE - AP$$

Luego $PQRS$ es un rombo, pero anteriormente se demostró que es un rectángulo. Se concluye que $PQRS$ es un cuadrado.

Solución del problema 5: Sigamos con la lista por 6 pasos:

1
2, 1
4, 1, 2
8, 2, 1, 4
16, 4, 1, 2, 8
32, 8, 2, 1, 4, 16

Notemos que luego de un número par de pasos, la primera mitad de la lista consiste de las potencias de dos con exponente impar. Consideremos la suma S de los números de la lista luego de los 2020 movimientos:

$$S = 2^{2019} + 2^{2017} + \cdots + 2 + 1 + \cdots + 2^{2016} + 2^{2018}.$$

Es conocido que la suma de todas las potencias de dos desde 1 hasta 2^k es $2^{k+1} - 1$. Se sigue que

$$S = 2^{2020} - 1.$$

Por otro lado, la observación clave es que la suma de los primeros 1010 números es el doble de la suma K de los últimos 1010, pero de forma invertida:

$$2^{2019} + 2^{2017} + \cdots + 2 = 2(2^{2018} + 2^{2016} + \cdots + 1) = 2K.$$

Por lo tanto,

$$2^{2020}-1=S=2K+K=3K.$$

de donde

$$K=\frac{2^{2020}-1}{3}.$$

La suma de los primeros 1010 números es

$$2K=2\left(\frac{2^{2020}-1}{3}\right).$$

Solución del problema 6: a) Se tiene que

$$x_{n+1}^2-ax_nx_{n+1}-bx_n^2=0 \implies x_{n+1}=\frac{ax_n\pm\sqrt{a^2x_n^2+4bx_n^2}}{2} \implies \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

Como $b>0$, entonces $a^2+4b>0$. Definimos $\lambda_1=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$ y $\lambda_2=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$, por lo anterior estos números son reales distintos. Luego tenemos que $\frac{x_{n+1}}{x_n}\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$. Se tiene que

$$x_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_1}{x_0}\cdot x_0$$

Cada fracción en la expresión anterior toma uno de los valores del conjunto $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ y por tanto hay i que toman el primer valor y $n-i$ que toman el segundo, luego

$$x_n=\lambda_1^i\cdot\lambda_2^{n-i}\cdot x_0$$

Como $0\le i\le n$, entonces x_n puede tomar $n+1$ valores distintos.

b) Sea S_n la suma de todos los valores de x_n con repeticiones. Para cada valor distinto $\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}x_0$, hay $\binom{n}{i}$ repeticiones, entonces se tiene que

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda_1^i\cdot\lambda_2^{n-i}x_0=(\lambda_1+\lambda_2)^nx_0=a^nx_0$$

Se concluye que $S_n=a^nx_0$.

2.4.4 NIVEL 3

Solución del problema 1: La raíces de x^2+x+1 son $z_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Además, se tiene que $z_k^2+z_k+1=0$ y por tanto $z_k^3-1=(z_k-1)(z_k^2+z_k+1)=0$, consecuentemente $z_k^3=1$.
Para que x^2+x+1 divida a $P(x)=x^{2^n}+x+1$, $P(z_k)=0$ para $k=1,2$. Veamos que

$$z_k^{2^2}=z_k, z_k^{2^3}=z_k^2, z_k^{2^4}=z_k$$

Inductivamente es fácil ver que $z_k^{2^{2m}}=z_k$ y $z_k^{2^{2m-1}}=z_k^2$. Luego $P(z_k)=z_k^{2^n}+z_k+1$, entonces $P(z_k)=2z_k+1\neq 0$ para n par y $P(z_k)=z_k^2+z_k+1=0$ para n impar. Hay 49 impares entre 3 y 99 inclusive, luego para 49 valores de n se cumple lo pedido.

Solución del problema 2: La potencia del punto A en circunferencia circunscrita al triángulo BDC nos da

$$AE\cdot AB=AD\cdot AC \iff AE=\frac{AD\cdot AC}{AB}$$

La potencia del punto C en circunferencia circunscrita al triángulo ABD nos da

$$CF\cdot BC=CD\cdot AC \iff CF=\frac{CD\cdot AC}{BC}$$

Combinando ambos resultados se tiene que

$$\frac{AE}{CF}=\frac{\frac{AD\cdot AC}{AB}}{\frac{CD\cdot AC}{BC}}=\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{CD}{BC}}$$

Finalmente el teorema de la bisectriz asegura que BD es la bisectriz si y sólo si

$$\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BC} \iff \frac{AE}{CF}=1 \iff AE=CF$$

Solución del problema 3: Definimos $f(n)=1+2019+2019^2+2019^3+\ldots+2019^{n-1}$. Si n es impar, entonces $f(n)$ es la suma de una cantidad impar de impares, luego $f(n)$ es impar. En este caso la máxima potencia de 2 que divide a $f(n)$ es 2^0.
Si n es par, sea $n=2^k l$ con k,l enteros positivos y l es impar. Ahora veamos que

$$2018f(n)=(2019-1)(1+2019+2019^2+2019^3+\ldots+2019^{2^k l-1})=2019^{2^k l}-1$$

$$2018f(n)=(2019^{2^k}-1)(1+2019^{2^k}+2019^{2^k(2)}+\ldots+2019^{2^k(l-1)})=(2019^{2^k}-1)L$$

Como L es la suma de l impares, entonces también es impar. Ahora veamos que

$$2019^{2^k}-1=(2019^{2^{k-1}}+1)(2019^{2^{k-1}}-1)=(2019^{2^{k-1}}+1)(2019^{2^{k-2}}+1)(2019^{2^{k-2}}-1)=\ldots$$

$$\implies 2019^{2^k}-1=(2019^{2^{k-1}}+1)(2019^{2^{k-2}}+1)\ldots(2019^2+1)(2019+1)(2019-1)$$

Entonces tenemos que

$$2018f(n)=(2019^{2^{k-1}}+1)(2019^{2^{k-2}}+1)\ldots(2019^2+1)(2020)(2018)L$$

$$\implies f(n)=(2019^{2^{k-1}}+1)(2019^{2^{k-2}}+1)\ldots(2019^2+1)(2020)L$$

Veamos que 4 divide a 2020 pero 8 no. Además, sabemos que

$$2019^{2m}\equiv 3^{2m}=9^m\equiv 1^m=1 \pmod 4 \implies 2019^{2m}+1\equiv 2 \pmod 4$$

Luego 2 divide a $2019^{2m}+1$ pero 4 no. Luego en la factorización de $f(n)$ se tiene que los primeros $k-1$ términos son divisibles para 2 pero no para 4, el siguiente es divisible para 4 pero no para 8 y el último factor es impar. Luego la máxima potencia de 2 que divide a $f(2^k l)$ es 2^{k+1}. **Solución del problema 4:** Vamos a mostrar una solución alternativa para n par. Primero consideremos $n = 2^k$. Vamos a demostrar por inducción en k que la máxima potencia de 2 que divide a $f(n)$ es 2^{k+1}. Para $k = 1$, se tiene $f(2) = 2020 = 4 \cdot 505$ y se cumple el caso base. Supongamos que 2^{k+1} es la máxima potencia de 2 que divide a $f(2^k)$. Ahora veamos que

$$f(2^{k+1}) = 1 + 2019 + 2019^2 + \ldots 2019^{2^k - 1} + 2019^{2^k} + 2019^{2^k+1} + 2019^{2^k+2} + \ldots 2019^{2^{k+1}-1}$$

$$f(2^{k+1}) = 1 + 2019 + 2019^2 + \ldots 2019^{2^k-1} + 2019^{2^k}(1 + 2019 + 2019^2 + \ldots 2019^{2^k-1})$$

$$f(2^{k+1}) = (2019^{2^k} + 1)(1 + 2019 + 2019^2 + \ldots 2019^{2^k-1}) = (2019^{2^k} + 1)f(2^k)$$

Como se vio antes 2 divide a $2019^{2^k} + 1$ pero 4 no, luego $2^{k+1}(2) = 2^{k+2}$ es la máxima potencia de 2 que divide a $f(2^{k+1})$ y esto concluye la inducción.
Ahora consideremos $n = 2^k l$ con k, l enteros positivos y l es impar. Luego se tiene que

$$f(2^k l) = f(2^k) + 2019^{2^k} f(2^k) + 2019^{2^k(2)} f(2^k) + \ldots + 2019^{2^k(l-1)} f(2^k)$$

$$f(2^k l) = (1 + 2019^{2^k} + 2019^{2^k(2)} + \ldots + 2019^{2^k(l-1)}) f(2^k) = f(2^k)L$$

Como L es impar, entonces 2^{k+1} es la máxima potencia de 2 que divide a $f(2^k l)$.

Solución del problema 5: Sean S la suma de sus dígitos y a_i la cantidad de veces que aparece el dígito i en el número N con $0 \le i \le 9$. Entonces

$$S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 9a_9$$

Notamos que para hallar S, es suficiente con hallar a_i para $1 \le i \le 9$. Si hay 8 alumnos o menos no es posible hallar el número en todos los casos, pues es necesario hallar al menos 9 entre los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ y esto es imposible con menos de 9 preguntas; el décimo se puede hallar del hecho que $a_0 + a_1 + \ldots + a_9 = n$. Es posible hallar S si hay 9 alumnos o más con la siguiente estrategia: para $1 \le i \le 9$, el i-ésimo alumno escoge el número $i \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ dígitos}}$ y Danielle debe comunicar a_i al alumno. Finalmente, hallan S con la fórmula mostrada al comienzo.

Solución del problema 6: Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \le b \le c$

$$4abc = (a+3)(b+3)(c+3) = abc + 3(ab+bc+ca) + 9(a+b+c) + 27$$

$$abc = ab + bc + ca + 3(a+b+c) + 9$$

$$a(bc - b - c - 3) = bc + 3b + 3c + 9 \implies a = \frac{bc + 3b + 3c + 9}{bc - b - c - 3}$$

$$bc - b - c - 3 \mid bc + 3b + 3c + 9 \implies bc - b - c - 3 \mid bc + 3b + 3c + 9 - (bc - b - c - 3) = 4b + 4c + 12$$

Tenemos que $bc - b - c - 3 = (b-1)(c-1) - 4 > 0$ y $4b + 4c + 12 > 0$. Supongamos que $a \ge 5$, luego

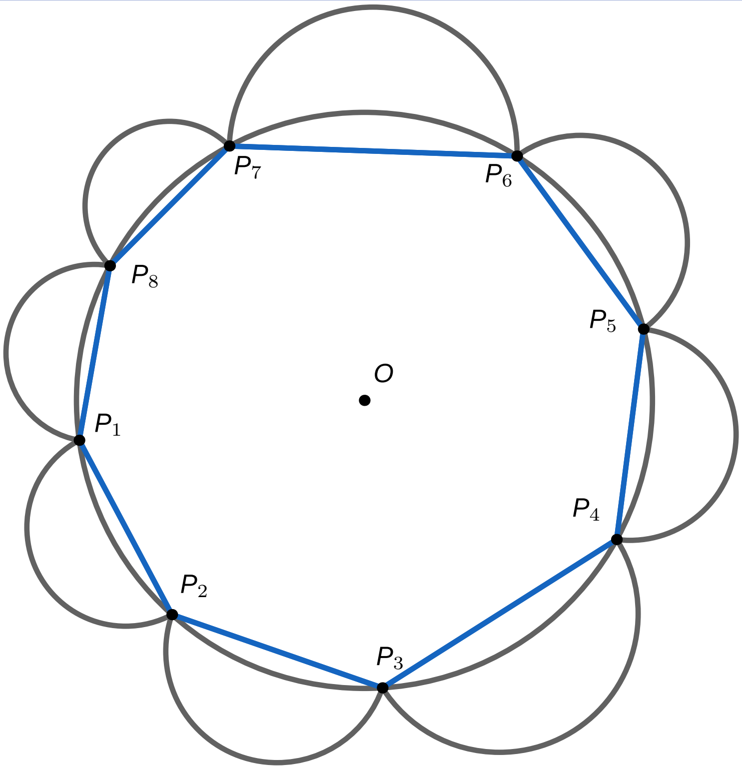
$$(bc - b - c - 3)4 \le 4b + 4c + 12 \iff bc - 2b - 2c - 6 \le 0 \iff (b-2)(c-2) \le 10$$

Sabemos que $b \ge 5$, $c \ge 6$, entonces $(b-2)(c-2) \ge 3 \cdot 4 = 12 > 10$. Luego es imposible que $a > 4$, entonces $a = 4$.

$$(bc - b - c - 3)3 = 4b + 4c + 12 \implies 9bc - 21b - 21c - 63 = 0 \implies (3b-7)(3c-7) = 112$$

Si $b \ge 6$, entonces $3b - 7 \ge 11$, $c \ge 6$ y $3c - 7 \ge 11$. Luego $(3b-7)(3c-7) > 112$. Se concluye que $b \le 5$. Si $b = 4$, $3b - 7 = 5 \implies 5 \mid 112$. Lo cual es un absurdo. Si $b = 5$, $3b - 7 = 8 \implies 3c - 7 = 14 \implies c = 7$. Finalmente $a + b + c = 4 + 5 + 7 = 16$.

Solución del problema 7:



Denotemos $l_1, l_2, \ldots, l_n$ las longitudes de los lados del polígono y denotemos S al área pintada y A al área del polígono. Si sumamos S con el área del círculo unitario se obtiene como resultado el área del polígono más el area de los semicírculos en el exterior del polígono, es decir,

$$S + \pi = A + \frac{\pi}{8}(l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2)$$

$$S = A + \frac{\pi}{8}(l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 - 8)$$

Como las coordenadas del polígono son racionales, se tiene que el área del polígono es racional, entonces del dato se concluye que $\frac{\pi}{8}(l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 - 8)$ es racional. Como $l_i^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$ con $\Delta x_i, \Delta y_i \in \mathbb{Q}$ entonces l_i^2 es racional, por ende $l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 - 8$ es racional. Pero $\frac{\pi}{8}$ es irracional y el producto de un irracional y un racional no nulo es irracional, luego para que $S \in \mathbb{Q}$, el racional en dicho producto debe ser nulo. Se concluye que necesariamente $l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = 8 = 2 \cdot 2^2$. Es decir que la suma de los cuadrados de los lados es igual al doble del diámetro al cuadrado.

Primero consideremos una poligonal $P_1P_2 \ldots P_{m+1}$ con $m > 2$ que no se interseca está inscrita en una semicircunferencia de modo que $P_1P_{m+1} = d$ es el diámetro. Veamos que $\angle P_1P_2P_3 > \angle P_1P_2P_{m+1} = 90^\circ$ pues $m > 2$, entonces $\triangle P_1P_2P_3$ es obtusángulo y por ende $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 < P_1P_3^2$. Argumentando inductivamente con el hecho que $\triangle P_1P_3P_4$, $\triangle P_1P_4P_5$, ..., $\triangle P_1P_mP_{m+1}$ son obtusángulos, excepto el último que es rectángulo, se tiene que

$$P_1P_4^2 > P_1P_3^2 + P_3P_4^2 > P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2$$

$$d^2 = P_1P_{m+1}^2 = P_1P_m^2 + P_mP_{m+1}^2 > P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \ldots + P_mP_{m+1}^2$$

Por otro lado, si $m = 2$, entonces $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 = d^2$ y si $m = 1$, entonces $P_1P_2^2 = d^2$.

Como el polígono tiene dos vértices diametralmente opuestos, supongamos que tiene a y b lados en cada semiplano dividido por el diámetro. Si $a, b > 2$, entonces aplicando el hecho anterior en ambas poligonales, se tiene que $8 = 2 \cdot 2^2 > l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2$, lo cual es imposible. Si $a \leq 2$ y $b > 2$ o $b \leq 2$ y $a > 2$, entonces $8 = 2 \cdot 2^2 > l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2$, lo cual es imposible. Entonces se cumple que $a, b \leq 2$. Luego concluimos que hay dos casos: un triángulo rectángulo con vértices racionales o un cuadrilátero con vértices racionales y dos ángulos opuestos rectos.

Nota: Las áreas en cada *pétalo* de la *flor matemática* se conocen como *lunas*. Un resultado adicional para los casos encontrados es que el área total de las *lunas* es igual al área del polígono.

2.4.5 NIVEL U

Solución del problema 1: Como A_1 es diagonalizable, entonces $A_1 = P\Lambda_1P^{-1}$ donde P es la matriz de vectores propios y Λ_1 es la matriz diagonal de valores propios. Se define inductivamente

$$A_{n+1} = 2019(P\Lambda_nP^{-1})(P\Lambda_nP^{-1}) + bI = 2019P\Lambda_n^2P^{-1} + bPIP^{-1} = P(2019\Lambda_n^2 + bI)P^{-1}$$

Definiendo $\Lambda_{n+1} = 2019\Lambda_n^2 + bI$, se tiene que $A_{n+1} = P\Lambda_{n+1}P^{-1}$. Entonces A_n es diagonalizable para todo n y todas tienen los mismos vectores propios. Sea λ_n un valor propio de A_n, entonces por lo anterior se cumple que $\lambda_{n+1} = 2019\lambda_n^2 + b$. Si $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe, entonces $\lim_{n\to\infty}\lambda_n$ existe. Si $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$, entonces $2019\lambda^2 - \lambda + b = 0$.
Si b es tal que la ecuación cuadrática tiene dos raíces distintas α_1 y α_2: con $A_1 = \alpha_1 I$ la secuencia converge a $C = \alpha_1 I$ y con $A_1 = \alpha_2 I$ la secuencia converge a $C = \alpha_2 I$, lo anterior es imposible pues $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Se concluye que la ecuación cuadrática tiene una raíz repetida, luego $1 = 4(2019)b$. Se concluye que la ecuación cuadrática se tiene que $b = \frac{1}{4(2019)} = \frac{1}{8076}$, $\lambda = \frac{1}{2(2019)} = \frac{1}{4038}$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n = \frac{1}{4038}I \implies C = P\left(\frac{1}{4038}I\right)P^{-1} = \frac{1}{4038}PP^{-1} \implies C = \frac{1}{4038}I.$$

Solución del problema 2: a) Supongamos lo contrario, entonces f mantiene conexidad, es decir f es ó cóncava ó convexa. Sin pérdida de generalidad asumimos que f es convexa. Luego para todo $a_1, a_2, a_3 > 0$ tal que para x_1, x_2, x_3 distintos se cumple que

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = f\left(\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{x_2+x_3}{2}\right) < \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) < \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}\left(\frac{f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3)}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

El centroide del triángulo con vértices con coordenadas $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1,2,3$ tiene coordenadas $(x_{CG}, y_{CG}) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\right)$. Luego lo anterior implica que $f(x_{CG}) < y_{CG}$. Análogamente se cumple cuando f es cóncava se tiene $f(x_{CG}) > y_{CG}$. Se concluye que en ambos casos el centroide no puede pertenecer a la curva de f. Por reducción al absurdo tiene que existir un punto de inflexión en algún punto $c \in I$. Como la segunda derivada existe para todo punto de I, entonces se cumple que $f''(c) = 0$.
b) Supongamos que existe un triángulo no degenerado cuyos vértices y su centroide pertenecen a Γ, si la curva es continua diferenciable, entonces no puede mantener la convexidad por el hecho anterior. Sin embargo, las parábolas, las elipses y las circunferencias son continuas diferenciables y mantienen la convexidad (o concavidad). Entonces necesariamente la cónica Γ es una hipérbola.
Si la cónica Γ es una hipérbola, entonces en un sistema de coordenadas apropiado se cumple que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ para constantes positivas a, b. Los puntos $(-a, 0), (2a, \sqrt{3}b), (2a, -\sqrt{3}b)$ forman un triángulo no degenerado cuyo baricentro es $(a, 0)$; claramente todos los puntos pertenecen a Γ. Con esto se concluye la demostración.
Nota: La desigualdad mostrada en el primer literal es un caso particular de la desigualdad de Jensen.

Solución del problema 3: Sea w la n-ésima raíz de la unidad, es decir $w^n - 1 = 0$. En el plano complejo consideremos los números $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$. Sabemos que estos puntos forman un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria. Sin pérdida de generalidad asumimos que éstos son los vértices del polígono y que se escoge el vértice 1 para tomar las distancias. Entonces para $1 \leq i \leq n-1$ tenemos que $a_i = |1 - w^i|$. Ahora veamos que

$$a_i^2 = \left|1 - w^i\right|^2 = (1-w^i)\overline{(1-w^i)} = (1-w^i)(1-\overline{(w^i)}) = 1 - w^i - \overline{(w^i)} + (w^i)\overline{(w^i)} = 2 - w^i - \overline{(w^i)}$$

donde $\overline{}$ denota la conjugada compleja. Luego tenemos que

$$5 - a_i^2 = 3 + w^i + \overline{(w^i)}$$

Por otro lado, consideremos

$$(a - w^i)(a - \overline{(w^i)}) = a^2 + 1 - a(w^i + \overline{(w^i)})$$

$$5 - a_i^2 = 3 + w^i + \overline{(w^i)} = \frac{1}{b}(3b + b(w^i + \overline{(w^i)}))$$

Definimos b tal que $b = a^2 + 1$ y $b = -a$, entonces $a^2 + 3a + 1 = 0$. Por tanto $a = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Escogemos $a = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, por tanto $5 - a_i^2 = \frac{1}{b}(a - w^i)(a - \overline{(w^i)})$. Entonces se tiene que

$$\prod_{i=1}^{n-1}(5 - a_i^2) = \prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{b}(a - w^i)(a - \overline{(w^i)}) = \frac{1}{b^{n-1}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}(a - w^i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(a - \overline{(w^i)})\right)$$

Definimos $P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, como $w, w^2, \dots, w^{n-1}$ son las $n-1$ raíces de P, entonces se tiene que

$$P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{i=1}^{n-1}(x - w^i)$$

Si x es real, entonces $P(x)$ es real y por tanto $\overline{(P(x))}$ es real.
De lo anterior se tiene que

$$\prod_{i=1}^{n-1}(5 - a_i^2) = \frac{1}{b^{n-1}}(P(a))^2 = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{(-1)^n(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 1}{-\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1}\right)^2$$

$$\prod_{i=1}^{n-1}(5 - a_i^2) = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n} - 2(-1)^n(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + 1}{5\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n-1}(5 - a_i^2) = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2(-1)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

De la fórmula de Binet tenemos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \Longrightarrow F_n^2 = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2(-1)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Concluimos que $(5 - a_1^2)(5 - a_2^2)\dots(5 - a_{n-1}^2) = F_n^2$.

Solución del problema 4: a) Definimos $b_n = \log_{2019}(a_n)$, entonces $b_0 = -2$, $b_1 = -6$ y

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 6b_n$$

Tiene una ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Entonces se tiene que

$$b_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$$

Y reemplazando los valores iniciales se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, entonces

$$b_n = -(3+\sqrt{3})^n - (3-\sqrt{3})^n \Longrightarrow a_n = 2019^{-(3+\sqrt{3})^n - (3-\sqrt{3})^n}$$

Es fácil ver que $b_n < -(3+\sqrt{3})^n < -3^n < -n$, entonces $a_n = 2019^{b_n} < 2019^{-n}$. Además, $\sum_{n=0}^{\infty} 2019^{-n}$ converge porque es una serie geométrica con razón $\frac{1}{2019} < 1$, por ende $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
b) Tenemos que

$$a_n \cdot 2019^{A^n} = 2019^{-(3+\sqrt{3})^n - (3-\sqrt{3})^n + A^n}$$

El límite de $a_n \cdot 2019^{A^n}$ es zero sólo si $b_n + A^n$ tiende a $-\infty$.

- Si $A > 3 + \sqrt{3}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} -(3+\sqrt{3})^n + A^n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot 2019^{A^n} = \infty$$

- Si $A < 3 + \sqrt{3}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (3+\sqrt{3})^n + A^n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n \cdot 2019^{A^n} = 0$$

- Si $A = 3 + \sqrt{3}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n + A^n = \lim_{n\to\infty} (3 - \sqrt{3})^n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n \cdot 2019^{A^n} = 0$$

Luego el máximo valor de A es $3 + \sqrt{3}$.

Solución del problema 5: a) Para que un número i sea susurrado exactamente k veces debe ocurrir que los $k-1$ vecinos de la izquierda de i son menores a i y el k-ésimo vecino sea mayor a i. Hay $i-1$ números menores a i y $n-i$ mayores a i. El número de formas de escoger $k-1$ números de un conjunto de $i-1$ es $\binom{i-1}{k-1}$, siendo el total de formas $\binom{n-1}{k-1}$. Por lo tanto, la probabilidad que los $k-1$ vecinos de la izquierda de i sean menores a i es $\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$. Adicionalmente, debe ocurrir que el k-ésimo vecino sea mayor a i, para lo cual tenemos $n-i$ posibilidades de $n-k$ totales (luego de ya haber escogido $k-1$ vecinos e i). La probabilidad es $\frac{n-i}{n-k}$. Ya que los eventos son disjuntos, podemos multiplicar las probabilidades y concluir que:

$$P(i,k) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \frac{n-i}{n-k}.$$

b) Consideremos un número arbitrario i, y calculemos el valor esperado $\mu_i(k)$ del número de susurros que contienen el número i. Por propiedades de valor esperado, sabemos que:

$$\mu(k) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(k).$$

Es fácil ver que el número n da la vuelta al círculo y por lo tanto es susurrado exactamente n veces. De aquí concluimos que

$$\mu_n(k) = n.$$

Por un razonamiento similar, podemos ver que cualquier otro número i, es susurrado como mucho $n-1$ veces y al menos una vez (al inicio). De la definición de valor esperado, tenemos que para $i \neq n$:

$$\mu_i(k) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(i,k).$$

Reemplazando $\mu_n(k)$ y $\mu_i(k)$ en la definición de $\mu(k)$, tenemos que:

$$\mu(k) = n + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} kP(i,k).$$

Reemplazando $P(i,k)$ con la expresión de la parte a) y con un poco de álgebra de coeficientes binomiales:

$$\mu(k) = n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k+1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Solución del problema 6: a) Denotemos R_m a la región que cumple la desigualdad dada. Dividimos el espacio n-dimensional en hipercubos n-dimensionales cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Claramente el volumen de cada cubo mínimo es igual a 1 y la parte de sus coordenadas es constante, luego $\lfloor x_1\rfloor^2 + \lfloor x_2\rfloor^2 + \lfloor x_3\rfloor^2 + \ldots + \lfloor x_n\rfloor^2$ es constante dentro de cada cubo mínimo. Luego basta contar el número de cubos de volumen 1 dentro de la figura. Claramente se tiene $V(1,4) = 5$, $V(2,4) = 13$, $V(3,4) = 33$ y $V(4,4) = 89$. Ahora asumimos que $n > 4$.

Primero vamos a calcular $V(n,1)$. Se tienen dos casos: $|\lfloor x_i \rfloor| = 1$ para algún i y $\lfloor x_j \rfloor = 0$ para el resto j o todos las partes enteras son iguales a 0. En el primer caso el volumen para cada i es igual a 2 y claramente no repite para ningún i distinto y en el segundo caso el volumen es igual a 1. Se concluye que $V(n,1) = 2n + 1$. Ahora vamos a calcular $V(n,2)$. Claramente todos los cubos pertenecientes a R_1 también pertenecen a R_2. Se tienen dos casos: $|\lfloor x_{i_1} \rfloor| = 1, |\lfloor x_{i_2} \rfloor| = 1$ para $i_1 \neq i_2$ y $\lfloor x_j \rfloor = 0$ para el resto j o el punto pertenece a R_1. En el primer caso hay $\binom{n}{2}$ posibles parejas y para cada pareja hay 2^2 cubos. Luego

$$V(n,2) = V(n,1) + 4\binom{n}{2} = 2n(n-1) + 2n + 1$$

Ahora vamos a calcular $V(n,3)$. Claramente todos los cubos pertenecientes a R_2 también pertenecen a R_3. Se tienen dos casos: $|\lfloor x_{i_1} \rfloor| = 1, |\lfloor x_{i_2} \rfloor| = 1, |\lfloor x_{i_3} \rfloor| = 1$ para $i_1 \neq i_2 \neq i_3$ y $\lfloor x_j \rfloor = 0$ para el resto j o el punto pertenece a R_2. En el primer caso hay $\binom{n}{3}$ posibles ternas y para cada terna hay 2^3 cubos. Luego

$$V(n,3) = V(n,2) + 8\binom{n}{3} = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) + 2n + 1$$

Finalmente vamos a calcular $V(n,3)$. Claramente todos los cubos pertenecientes a R_3 también pertenecen a R_4. Se tienen tres casos: $|\lfloor x_{i_l} \rfloor| = 1$ con $l = 1,2,3,4$ con índices i_l distintos y $\lfloor x_j \rfloor = 0$ para el resto j, $|\lfloor x_i \rfloor| = 2$ y $\lfloor x_j \rfloor = 0$ para el resto j, o el punto pertenece a R_3. En el primer caso hay $\binom{n}{4}$ posibles cuaternas y para cada una hay 2^4 cubos y en el segundo caso hay $2n$ cubos. Luego

$$V(n,4) = V(n,3) + 16\binom{n}{4} + 2n = \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) + 4n + 1$$

b) Por lo anterior se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V(n,4) \cdot V(n,1)}{V(n,2) \cdot V(n,3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{2}{3}n^4 + O(n^3)) \cdot (2n + O(1))}{(\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)) \cdot (2n^2 + O(n))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{4}{3}n^5 + O(n^4)}{\frac{8}{3}n^5 + O(n^4)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V(n,4) \cdot V(n,1)}{V(n,2) \cdot V(n,3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{4}{3} + O(n^{-1})}{\frac{8}{3} + O(n^{-1})} = \frac{1}{2}$$

3 PREMIADOS

3.1 NIVEL B

MEDALLAS DE ORO

Amir Antonio Vizcaino Macancela, Guayaquil
Estefano Gómez Marriott, Guayaquil
Paulina Alejandra Morales Murillo, Guayaquil

MEDALLAS DE PLATA

Hugo Andrés Sares Vega, Machala
Doménica Galilea Barnuevo Cevallos, Machala
Carlos Mathías Ortiz Soto, Guayaquil
Braulio López Fernández, Machala
Samantha Elizabeth Rojas Romero, Machala
Flavio David Acurio Zambrano, Guayaquil
Esteban Andrés Miranda Toro, Quito

MEDALLAS DE BRONCE

Diego Sebastián Palacios Cabrera, Machala
Oscar Adolfo Kattan Amaluisa, Ambato
Thiago José Silva Zavala, Daule
Pablo Adrián Guartatanga Rodríguez, Guayaquil
Ana Sofía Lara Vera, Machala
Sebastián Ariel Pineda Valdiviezo, Guayaquil
Leonardo Emanuel Rosero Palma, Pedro Carbo
Helen Fiorela García Cruz, Pedro Carbo
Jorge Enrique Peñarreta Cruz, Machala
Axel Jeremy Zamora Balladares, Guayaquil

- Cortes para medallas:
  - Oro: 26 Puntos
  - Plata: 11 Puntos
  - Bronce: 3 Puntos

3.2 NIVEL A

MEDALLAS DE ORO

Maddy Cristhine Rivera Carchi, Machala
Roberto José Adum Coronado, Guayaquil
Hernán Anías Calderón Solano, Machala

MEDALLAS DE PLATA

Pedro Miguel Álvarez Vega, Daule
Nicolás Otatti Solá, Daule
Xavier Alejandro Avilés Galarza, Daule
Gerardo Jeremías Bracamonte Cañarte, Guayaquil
Juan Reinaldo León Mackenzie, Samborondón
Mía Leonor Dunn Bertha, Guayaquil
Fiorella Fernanda Zavala Barriga, Guayaquil

MEDALLAS DE BRONCE

Samantha Elizabeth Palacios Fiallo, Machala
Miguel Alejandro Márquez Briones, Quito
Alex Martín Bustamante Montesdeoca, Daule
Jhonny Scott Fonseca Cabrera, Machala
José Nicolás Sarmiento Andrade, Cuenca
Odalis Valentina Maldonado Reinoso, Guayaquil
Fernanda Paulina Galarza Paliz, Machala
Amelia Solange Gutiérrez Pazmiño, Ambato
Jacqueline Andreina Tamayo Bonilla, Santo Domingo

- Cortes para medallas:
  - Oro: 21 Puntos
  - Plata: 9 Puntos
  - Bronce: 1 Puntos

3.3 NIVEL 1

MEDALLAS DE ORO

Sebastián Andrés Wan Moreno, Guayaquil
Jorge Capelo Veloz, Guayaquil
José Adrián Clavijo Sotomayor, Guayaquil

MEDALLAS DE PLATA

Emilio Stefano Cevallos Bigalli, Guayaquil
Juan Pablo García Sánchez, Guayaquil
María José Indacochea Rosado, Guayaquil
Emilio Alexander Zamora Wong, Guayaquil
Martín Alejandro Verdezoto Luzurriaga, Quito

MEDALLAS DE BRONCE

Luciana Valentina León Salazar, Guayaquil
Carlos Alfonso Montesdeoca Loor, Guayaquil
Peter Niels Olsen Breilh, Guayaquil
Anahí Nicole Villagómez Bedón, Guayaquil
Sheldon Gabriel López Zúñiga, Quito
Mateo Stéfano Rivera De La Cueva, Quito
Isabella Sofía Berrezueta Varas, Guayaquil
Bárbara Paulette Baquerizo Lucas, Guayaquil
Wilhelm Ramón Gonce Quintana, Guayaquil
Alejandro José Larrea Reyes, Guayaquil

MENCIONES DE HONOR

Ailyn Paulette Del Pezo Mena, Guayaquil
Mateo Sebastián Sigüenza Uyaguari, Guayaquil
Pablo Xavier Segarra Uyaguari, Guayaquil

- Cortes para medallas:
  - Oro: 19 Puntos
  - Plata: 15 Puntos
  - Bronce: 12 Puntos

3.4 NIVEL 2

MEDALLAS DE ORO

Jahir Manuel Cajas Toapanta, Machala
Mauricio Andrés Cevallos Robles, Guayaquil
Víctor Andrés Uzhca Zorrilla, Guayaquil

MEDALLAS DE PLATA

Ilidio Samuel García Casanova, Guayaquil
Mauricio Adrián Mantilla Ruales, Guayaquil
Kevin Daniel Rojas Washco, Guayaquil
Pablo Enrique Álvarez Dávila, Guayaquil
Violeta Victoria Gómez Gamboa, Guayaquil
Mateo Nicolás Vivanco Apolo, Guayaquil
Pablo Adrián Miranda Toro, Quito

MEDALLAS DE BRONCE

Luis Diego Morejón Salvatierra, Guayaquil
Eduardo Javier Cedeño Behr, Guayaquil
Andrés Sebastián Fuentes Lupera, Guayaquil
Emilio Adrián Gómez López, Guayaquil
Jorge Andrés Montero Aguirre, Guayaquil
Natasha Fernanda Valarezo Oyola, Guayaquil
Gabriela Marisol Escobar Verdezoto, Quito
Raúl Andrés Barriga Chávez, Guayaquil
Adrián Emilio Torres Ronquillo, Guayaquil

MENCIONES DE HONOR

Steve Robinson Feraud, Guayaquil
David Nicolás Parra Vizcaíno, Quito
Juan Carlos Baque De La Torre, Guayaquil
Leonardo Andrés Sánchez Gilbert, Guayaquil
Paula Cristina Valencia Hilm, Quito
Adriana Valentina Chamba Granda, Guayaquil
Daniel Emilio Medina Alvarado, Guayaquil
Luis Fernando Ortega Torres, Guayaquil
Gabriel Alexánder Zurita Yépez, Quito

- Cortes para medallas:
  - Oro: 17 Puntos
  - Plata: 14 Puntos
  - Bronce: 10 Puntos

3.5 NIVEL 3

MEDALLAS DE ORO

Giácomo Yu Chen, Guayaquil
Yu Peng, Guayaquil
Leonardo Emanuel Zambrano López, Guayaquil

MEDALLAS DE PLATA

Yifan Chen, Guayaquil
Stephanie Vanessa Gallegos Caamaño, Guayaquil
Jhosué Esteban Infante Carvajal, Guayaquil
Zhirón Cristina Wu Yuan, Guayaquil
Marco André Manrique Centeno, Guayaquil
Oscar Youssef Hill Zouein, Guayaquil
Jean Paúl Peralta Rosado, Guayaquil
Sebastián Mateo Torres Molina, Guayaquil

MEDALLAS DE BRONCE

Adrián Josué Mosquera Crespo, Guayaquil
Eliath Sebastián Velasco Campozano, Guayaquil
Lucio Ricardo Alarcón Adrián, Guayaquil
Miguel Angel Guzmán Chang, Guayaquil
José Gabriel Castillo Flores, Cuenca
Milton Josué Sánchez Véliz, Guayaquil
Julio Enrique Viche Castillo, Guayaquil

- Cortes para medallas:
  - Oro: 27 Puntos
  - Plata: 12 Puntos
  - Bronce: 7 Puntos

3.6 NIVEL U

MEDALLAS DE ORO

Sebastián David Regalado Lozano, Waterloo
Adrián Josué Delgado Miranda, Guayaquil

MEDALLAS DE PLATA

Nicolás Coloma Carphio, Quito
Anthony Joshué Flores Azúa, Guayaquil
Daniel Jeremías Moreira Malavé, Guayaquil
David Andrés Montalván Poppe, Guayaquil

MEDALLAS DE BRONCE

Jonathan Israel Rivera Ramos, Quito
Melvin Henry Poveda Quimiz, Guayaquil
Guillermo Ricardo Aguilera Hidalgo, Quito
Esteban Sebastián Moscoso García, Quito
Francisco Martín Ponce Carrión, Quito
Cristhyan Bryan Cayetano Tumbaco, Guayaquil

- Cortes para medallas:
  - Oro: 23 Puntos
  - Plata: 14 Puntos
  - Bronce: 8 Puntos

4 EQUIPO DE TRABAJO

La organización de la Olimpiada Nacional de Matemáticas 2019 fue realizada gracias al trabajo de:

- Romnie Acosta (OMEC)
- Eduardo Alba (USFQ)
- Fernando Álvarez (OMEC)
- Danielle Aycart (OMEC)
- Valerie Bustos (OMEC)
- Jorge Chamaidán (OMEC)
- Nelson Córdova (USM)
- Adrián Delgado (OMEC)
- Pedro Espinoza (UETS)
- Anthony Flores (OMEC)
- Fernando Gómez (OMEC)
- Qi Han (OMEC)
- David Hervas (USFQ)
- Ana Paula Indacochea (OMEC)
- Galo Lara (OMEC)
- Hugo Mena (USM)
- Eugenia Molina (UEPRIM)
- Andrea Moreira (USFQ)
- Eladio Oliveros (USM)
- Miguel Ordóñez (OMEC)
- Omar Paladines (OMEC)
- Javier Pérez (OMEC)
- Paula Pettinelli (USM)
- Julio Rivera (OMEC)
- Marcelo Rodríguez (OMEC)
- Daniel Samaniego (OMEC)
- Alfredo Sánchez (OMEC)
- Leslie Santamaría (USM)
- Xavier Soriano (OMEC)
- Vicente Torres (OMEC)

5 AUSPICIANTES

Un agradecimiento a los auspiciantes del evento:

- Universidad San Francisco de Quito (USFQ)
- Universidad Católica de Santiago de Guayaquil (UCSG)
- Sociedad Ecuatoriana de Matemáticas (SEDEM)
- Universidad de Guayaquil (UG)
- Unidad Educativa Particular Bilingüe Principito & Marcel Laniado de Wind (UEPRIM)
- Unidad Educativa Técnico Salesiano (UETS)
- Academia Mathletas
- WebDraco S.A.